Master *MEEF*, mention *Parcours et Ingénierie de la formation*, parcours ***RED : Recherches en Didactique***

La transposition didactique du sens « quotient » pris par la fraction, en France et dans quelques pays européens

Aline FAHRENBERG

Année 2022-2023

TER

Directrice de TER : Laetitia BUENO-RAVEL

SOMMAIRE

1 INTRODUCTION

Le point de départ de cette étude est lié à une expérience professionnelle d'enseignement en mathématiques dans le secondaire d'une dizaine d'années, expérience au cours de laquelle moi-même et mes collègues faisons le même constat : l'apprentissage des calculs mettant en jeu les fractions est délicat, voire laborieux, les écueils sont nombreux. Malgré la progressivité du travail sur les fractions au collège et malgré une répétition sur plusieurs années de certaines règles de calcul (ceci tout en les prolongeant, en les affinant et en les illustrant au travers d'exercices variés), il n'est pas rare d'observer que des élèves en classe de 4e ou de 3e ne cherchent plus à y mettre du sens ; dans le meilleur des cas ils cherchent davantage à appliquer des algorithmes de calcul. Or ces algorithmes de calcul sont souvent mal mémorisés, le sens sous-jacent faisant défaut. De plus, ce que l'enseignant pense avoir construit ou reconstruit avec ses élèves au niveau d'un sens retrouvé en 4e se révèle bien fragile et semble parfois anéanti quelques mois plus tard en classe de 3e.
La difficulté de l'acquisition du concept de fraction n'est pas une spécificité française et peut s'observer dans de nombreux pays. Toutefois l'enquête TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) de 2015, conduite auprès d'élèves du niveau CM1, tend à montrer que l'apprentissage des fractions est inégal selon les pays. D'après la recherche menée par Martinez & Roditi (2017), recherche circonscrite aux fractions sur ces évaluations, « la performance des élèves dépend de facteurs qui relèvent bien des programmes scolaires, notamment du fait qu'ils soient riches, précis et complets, et qu'ils emportent l'adhésion des enseignants », puisque ces derniers sont les vecteurs de la mise en œuvre effective des programmes scolaires dans les classes.
Outre les disparités dans l'application des curriculums en France, les difficultés dans l'apprentissage du concept de fraction sont nombreuses et documentées dans diverses études. Par exemple, dans leurs travaux de recherche, Mercier (2004) puis Alahmadati (2016) ont pu en répertorier un certain nombre développées et étudiées par divers auteurs, la première étant pour les élèves le symbole même de la fraction, nécessitant de mettre en relation deux nombres différents. Ensuite, les apprentissages des opérations sur les fractions sont perçus comme complexes de part le nombre important de règles qu'elles induisent. De plus, il devient pour l'élève impérieux de prendre conscience des différences entre les nombres déjà connus et le statut particulier des fractions faisant intervenir d'autres connaissances préalables

pour pouvoir être manipulées. Enfin, l'élève devra prendre également conscience qu'en pratique, il existe une multitude de représentations graphiques d'une même fraction.

Ces quatre difficultés identifiées et bien documentées sont enrichies par Alahmadati (2016) qui en relève jusqu'à douze. Parmi celles-ci, l'une des difficultés est imputable aux très nombreuses interprétations d'une fraction, une autre encore est attribuée à une compréhension lacunaire des enseignants concernant ce savoir à transmettre. Enfin, il identifie que « la définition d'une fraction comme étant une division, lors de l'apprentissage du concept de fraction, met en évidence une des plus grandes difficultés conceptuelles » (p. 106).

La présente recherche propose d'examiner les apprentissages autour de la définition d'une fraction comme étant un quotient. Comment s'articule en amont la réflexion et la préparation à cette définition de manière effective dans les classes ? À quel moment de la progression cette définition est-elle abordée ? La définition du quotient utilisée est-elle celle qui est préconisée par les prescriptions curriculaires : « Le quotient de a par b ($b \neq 0$) est le nombre qui, multiplié par b donne a, on le note $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$ » ? Dans les cas où celle-ci ne serait pas utilisée de cette manière, quelles en seraient les motivations et quelles en seraient les variantes ? Comment les manuels scolaires proposent-ils de s'approprier cette définition ?

Dans notre étude, ce questionnement initial sera d'abord reformulé à l'aide de l'éclairage d'un cadre théorique adapté, puis une analyse épistémique nous permettra de préciser le savoir en jeu. Une analyse de transposition sera menée à travers la documentation institutionnelle des programmes scolaires et à travers le savoir apprêté dans les manuels, en France et dans quelques autres pays européens. Ceci nous amènera à faire des comparaisons synchroniques des différentes transpositions. Enfin, nous porterons un regard sur la transposition interne qu'accomplissent les enseignants dans leurs classes en exploitant leurs réponses données à un questionnaire en ligne. Nous pourrons finalement conclure sur quelques éléments mis en lumière par notre enquête.

2 Cadre théorique et Méthodologie

2.1 La Théorie Anthropologique du Didactique

Notre recherche s'inscrit dans le cadre théorique anthropologique des faits didactiques (TAD) développé par Yves Chevallard en didactique des mathématiques (Chevallard, 1989). Cette théorie est en filiation avec la Théorie des Situations didactiques développée par Guy Brousseau, mais elle met l'accent sur la relativité institutionnelle des savoirs, tout en ayant l'ambition de dépasser les séparations disciplinaires en didactique. Ainsi, la TAD a pour objectif d’étudier et de modéliser la vie des savoirs partagés au sein d’une institution, en caractérisant les conditions et les contraintes de la transmission de ces savoirs et savoir-faire, ceci en développant des outils pour servir la didactique des mathématiques, mais qui peuvent aussi s’appliquer à d’autres champs disciplinaires.

La théorie de la transposition didactique

Les travaux d’Yves Chevallard sur la théorie de la transposition didactique sont antérieurs et à l’origine de la TAD. La théorie de la transposition didactique examine le savoir présent dans le système didactique à travers toutes les étapes de transformation que celui-ci subira. En effet, les scientifiques produisent un savoir savant qui ne peut pas être enseigné tel quel dans le milieu scolaire, ce savoir savant doit être adapté avant de pouvoir être enseigné pour qu’ensuite les élèves s’en emparent et se l’approprient. Dans un premier temps, les savoirs savants seront désignés comme savoir à enseigner par la noosphère (pédagogues, didacticiens, enseignants, etc.) dans une transposition externe, où l’on pense le fonctionnement didactique, d’après Chevallard (Chevallard, 1985, 1992). Certains choix curriculaires sont alors faits pour pouvoir élaborer les programmes scolaires officiels français tout en respectant le contexte socio-culturel et historique, chaque élément de programme devant trouver une place cohérente dans l’ensemble tout en s’inscrivant parfaitement dans la progression. Le savoir savant devra vérifier cinq conditions avant de devenir un savoir à enseigner dans les programmes officiels. Ces conditions ne seront pas détaillées ici, mais ceci induit que le savoir savant fait l’objet d’une réorganisation avant de devenir un savoir à enseigner dans les programmes scolaires français.

Dans ses travaux, Bueno-Ravel (2005) a mis en évidence l’apprêtage didactique du savoir à enseigner, ce qui permet d’ajouter une étape dans le mécanisme de transposition interne au système d’enseignement, en prenant en considération le travail transpositif des auteurs de manuels et des enseignants. Le cheminement du savoir à enseigner se poursuit alors dans la manière dont il sera apprêté dans les manuels scolaires. L’éditeur se porte garant de la conformité du manuel aux programmes officiels, cependant les auteurs peuvent interpréter l’organisation didactique des savoirs de différentes manières, ou mettre l’accent sur certains aspects plutôt que d’autres. D’après Chevallard (1985, 1992), les manuels sont le résultat d’une transposition didactique des textes de programme, ils relèvent de la transposition interne du savoir. Pour analyser les manuels et les textes de programme, la théorie de la transposition a été élargie à la problématique écologique en didactique comme moyen de questionner le réel, ce qui est exprimé ainsi par Artaud (1997) :

> Qu’est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi qu’est-ce qui n’existe pas, et pourquoi ? Et qu’est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? (Artaud 1997).

La notion d’« écosystèmes didactiques » permet de prendre en compte les contraintes et les exigences liées aux relations qu’entretiennent les objets d’enseignement dans les systèmes didactiques et liées aux choix de transposition de la noosphère. Chevallard complète cette approche écologique par une approche anthropologique qui décrit les rapports institutionnels et l’ensemble des contraintes qui influencent les auteurs de manuels et les enseignants.

Le savoir à enseigner dans les programmes officiels et le savoir à enseigner apprêté dans les manuels en tant que support essentiel pour l’enseignant, fait ensuite l’objet d’une transposition interne (interne au système d’enseignement) par les enseignants. Pour construire un projet de cours qui puisse s’intégrer dans l’organisation des séquences d’enseignement, répondre à certaines contraintes et épouser la personnalité de l’enseignant, le savoir à enseigner est de nouveau transformé et interprété. Il devient ainsi le savoir enseigné, celui-ci subira d’autres transformations pour finalement devenir le savoir appris et construit par l’élève.

À travers toutes ces phases de la transposition didactique (externes et internes), les savoirs ont subi des transformations qui induisent naturellement des irrégularités voire des décalages entre le savoir à enseigner et le savoir appris. La théorie de la transposition didactique met en évidence l’écart systématique entre un savoir enseigné et les références qui le légitiment ceci étant dû aux contraintes auxquelles le système d’enseignement est soumis.

Les praxéologies

Un concept essentiel de la TAD pour décrire et expliquer les rapports institutionnels à un objet de savoir dans leur fonctionnement est celui d’organisation praxéologique, ou praxéologie (Bosch et Chevallard, 1999). La praxéologie part d’un premier postulat : toute activité humaine peut être analysée en structures d’action appelées « types de tâches » qui peuvent être saillantes dans une pratique institutionnelle. La délimitation des types de tâches est flexible, mais doit cependant rester précise. L’activité dont le contenu serait trop large ou mal défini est désigné par « genre de tâches ». Un deuxième postulat vient ensuite spécifier les « types de tâches » : l’accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d’une technique (Bosch et Chevallard, 1999), la technique étant vue ici comme une « manière de faire ». À cette manière de faire correspond une technologie (autre postulat) : un discours qui décrit et légitime les tâches et techniques, et ainsi permettre éventuellement la collaboration de plusieurs acteurs dans la production de cette tâche. Cette technique doit elle-même être justifiée par la théorie de la technique. L'activité humaine se trouve alors décomposée dans l'organisation praxéologique en deux blocs : le bloc pratique (du grec *praxis*) et le bloc du discours raisonné (*logos*).

2.2 Questions de recherche

À la lumière du cadre théorique choisi, notre questionnement initial autour de la fraction-division peut s'énoncer à présent sous forme de questions de recherche.

La présente recherche propose d'examiner la transposition didactique de ce savoir à transmettre dans le cadre scolaire, tout d'abord à travers l'analyse des programmes officiels de l'Éducation nationale :

QR1 : Quels sont les choix de transposition faits par rapport à la fraction-division dans les programmes scolaires français en fin de cycle 3 ?

Cette étude de transposition explorera ensuite la manière dont est apprêté cet objet de savoir dans les manuels scolaires :

QR2 : Comment, à partir du savoir défini comme étant à enseigner ce savoir est-il apprêté dans les manuels scolaires ?

Cette recherche interrogera également la transposition du point de vue des choix faits par l'enseignant :

QR3 : Comment ensuite les enseignants s'emparent-ils du savoir à enseigner et du savoir apprêté pour construire leur projet de cours ?

2.3 Méthodologie

Nous mènerons au préalable une analyse épistémique concernant la notion de fraction-division pour recueillir des éléments qui nous permettront d'en comprendre tous les aspects et de mieux circonscrire notre étude.

Complémentarités

Dans ses travaux sur l'importance de l'analyse des manuels, Chaachoua (2014) a su mettre en évidence des complémentarités importantes :

— la complémentarité de l'analyse des programmes et des manuels : l'analyse des manuels vient compléter et préciser l'analyse des programmes.

— la complémentarité de l'analyse écologique et l'analyse praxéologique : l'analyse écologique identifie les différents contextes de vie de l'objet et l'analyse praxéologique

> précise comment les objets doivent ou peuvent être manipulés par les sujets, élève ou enseignant. (Chaachoua, 2014, p.14).

Dans un premier temps, pour apporter des éléments de réponse à notre première question de recherche, nous allons mener une étude de transposition dans la documentation institutionnelle française, il s'agit de mettre en évidence la définition choisie de la fraction-division, et de repérer à quel moment et comment elle s'insère dans la progression globale (programmation, progression, définition). Nous analyserons la transposition qui en est faite dans les manuels scolaires en choisissant des manuels parmi les plus récents et les plus utilisés par les enseignants pour répondre à QR2. Pour mener cette analyse comparative de manuels, nous utiliserons trois critères. Nous examinerons les différentes activités de découverte proposées, et nous comparerons la définition de la fraction division qui y est donnée à celle préconisée dans les programmes officiels. Il s'agira ensuite de se pencher sur la manière dont est travaillée cette notion à travers les exercices présentés, aussi nous mènerons une analyse praxéologique des manuels français afin d'analyser l'activité de l'élève. Nous définirons alors des types de tâches, et pour mieux appréhender l'activité qui se rapporte à la fraction-division des sous-types de tâches seront considérés.

D'après Bessot et Comiti (2008), la comparaison de systèmes éducatifs permet la constitution d'un répertoire de praxéologies tout en interrogeant les raisons d'être de ces praxéologies (et d'en examiner également les variantes). Pour éclairer les choix de transposition français, nous mènerons une comparaison synchronique avec différentes transpositions étrangères dans cinq autres pays européens (Danemark, Espagne, Italie, Allemagne et Angleterre), tant au niveau des programmes officiels (toujours en lien avec la programmation, la progression et la définition de cet objet de savoir), qu'au niveau du savoir apprêté dans des manuels scolaires représentatifs. Nous produirons alors une grille d'analyse concernant ces six pays afin de comparer les données recueillies.

Nous étudierons ensuite les choix de transposition faits par les enseignants français grâce à un questionnaire en ligne anonyme pour analyser la situation existante. Le questionnaire a pour but de situer le contexte dans lequel l'enseignant exerce, de recueillir des faits sur la transposition adoptée (et les difficultés éventuelles qui en découlent) ainsi que de recueillir des opinions personnelles quant à l'enseignement de cet objet de savoir. La construction de ce questionnaire sera élaborée à partir des résultats obtenus suite à l'analyse épistémique et l'analyse de transposition des programmes et des manuels. Nous ferons une analyse a priori du questionnaire en discernant les différents choix possibles qui s'offrent aux enseignants, que ce soit au niveau du travail de transposition, du choix de manuel, etc. Si une partie du questionnaire relève de l'expression libre de l'enseignant, il devra également être rendu possible de ne pas répondre à certaines questions. Lorsque les données relatives au questionnaire seront recueillies, nous effectuerons une analyse a posteriori, en confrontant nos conjectures aux réponses effectives données par les enseignants. Pour examiner plus finement la pratique des enseignants à travers le questionnaire, nous utiliserons l'outil statistique disponible sur le logiciel d'enquête LimeSurvey que nous avons utilisé dans cette partie pour traiter les données.

3 ANALYSE ÉPISTÉMIQUE

3.1 Les différents sens de la fraction

En didactique des mathématiques, il existe de nombreuses classifications concernant les différents sens de la fraction, le choix d'une classification plutôt qu'une autre sera déterminé par l'objet d'étude du chercheur. Kieren (1976) a été le premier à étudier les différentes significations des nombres rationnels, il en identifie alors sept différentes. En 1980, Kieren modifie cette classification et la fraction est alors interprétée comme une part (la partie d'un tout), une mesure, un rapport, un quotient ou un opérateur. En 1983, d'autres chercheurs réorganiseront cette typologie dans « the Rational number project » en distinguant de nouveau sept conceptions de la notion de fraction ; ces mêmes auteurs reviendront 10 ans plus tard sur cette classification pour ne retenir que cinq interprétations.

Dans son travail de recherche, Mercier (2004) a pu répertorier à travers ses lectures neuf significations accordées aux fractions (ces significations ne sont pas toutes issues du même auteur) et a choisi de toutes les conserver pour sa recherche. Ces sens possibles sont : « nombre, rapport, relation entre une partie et un tout, relation entre une partie et un ensemble, mesure, nombre sur la droite numérique, quotient, opérateur et probabilité » (p. 15).

Dans la contribution de Coulange & Train (2017) seuls quatre sens sont retenus : « partage de l'unité, partage d'une grandeur, commensuration et quotient », la commensuration étant une re-découverte de l'acception « fraction commensuration » de Brousseau & Brousseau, (2008).

D'autres classifications existent encore, cependant dans la présente étude, nous adopterons la classification proposée par les chercheurs de « the Rational number project », où les différentes interprétations des fractions sont : la fraction « partie-tout », la fraction « rapport », la fraction « opérateur », la fraction « quotient », et la fraction « mesure ». Cette typologie est explicitée en français de manière claire et succincte par Martinez & Roditi (2017) :

La fraction « partie-tout » ou « partition » quantifie la relation entre un tout (une unité ou, respectivement, une collection d'unités) et le nombre de parties égales qui le composent. Cette conception est mobilisée dans les propositions : « les trois quarts de la tarte ont été mangés » ou « dans cette classe, les trois cinquièmes des élèves sont des filles ». La fraction « rapport » met en relation la mesure de deux parties, sans référence à celle du tout, comme dans la phrase « L'équipe de direction comporte trois femmes pour deux hommes ». La fraction « opérateur » ne représente pas une quantité mais une transformation. Ainsi, la multiplication du prix affiché par la fraction 4/5 permet de calculer le prix à payer lors d'une remise de 20 %. La conception « quotient » correspond au nombre que représente une fraction, elle ne quantifie pas de lien entre un numérateur et un dénominateur ; c'est le cas de la fraction 1/2 quand elle signifie seulement le nombre 0,5. Enfin, une unité étant fixée, une fraction « mesure » est une fraction utilisée pour exprimer la mesure d'une grandeur : par exemple, la longueur d'une corde est 5/4 lorsque la corde tendue coïncide avec cinq reports d'un quart de l'unité. (2017, p. 26)

Le concept de fraction se présente alors comme un concept multi-facette complexe puisque formé de sous-concepts inter-reliés, le sous-concept « partie-tout » étant à la racine et également un prérequis à l'acquisition des autres. Pour illustrer ceci, Behr et al. (1983) ont produit un schéma conceptuel pour l'enseignement des fractions dont une traduction est la suivante :

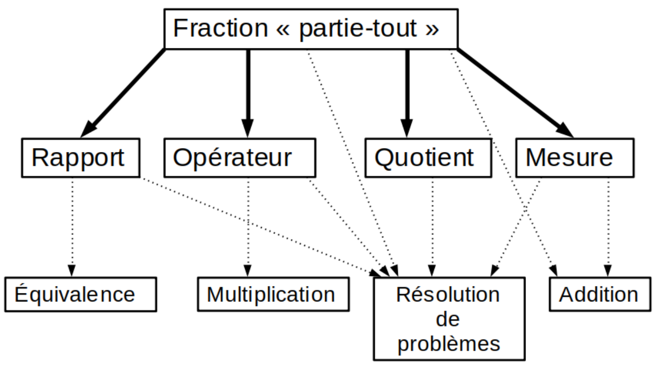


Figure 1: Schéma conceptuel pour l'enseignement des fractions (Behr, M., et al., 1983).

De plus, comme le mentionne Kieren (1980), les différentes interprétations de la fraction ne sont pas indépendantes les unes des autres, les problèmes mathématiques qui permettent de donner du sens aux fractions ne font que très rarement intervenir une seule interprétation, et font plutôt intervenir une coordination entre celles-ci. Kieren (1980) souligne ainsi que la compréhension du concept de fraction nécessite une compréhension des différentes interprétations et de la manière dont elles interagissent. Dans son travail de recherche, Pedersen (2021) a présenté une nouvelle illustration liant les cinq interprétations retenues par Behr et al. (1983), en mettant l'accent sur le chevauchement des interprétations de la fraction :

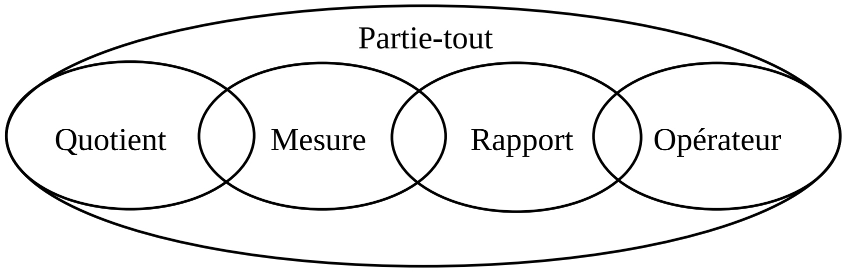


Figure 2: Modèle théorique liant les interprétations (Pedersen P., 2021, d'après Behr, M., et al., 1983)

3.2 Le sens « quotient » pris par la fraction

Cette interprétation de la fraction est liée à la définition du nombre rationnel. La barre de fraction prend alors le sens de la division où le numérateur est divisé par le dénominateur. Le résultat de cette division est le quotient : $\frac{a}{b} = a \div b$.

D'après Kieren (1980), le sous concept du « nombre rationnel en tant que quotient » est en lien étroit avec la relation partie-tout. Mais pour l'apprenant, il émerge et il est appliqué dans un contexte différent. Il permet la quantification du résultat en divisant une quantité par un nombre donné de parts. Si diviser une unité en quarts et en prendre trois (3/4) amène à obtenir la même quantité que lorsqu'on divise 3 unités en quatre parts (3/4), il n'en reste pas moins que pour l'apprenant ces deux problèmes sont deux problèmes distincts. C'est en soi une véritable tâche pédagogique dans l'éducation mathématique, que de développer la construction du nombre rationnel et le langage qui l'accompagne permettant de mettre en lien ces deux sous-concepts. Dans l'exemple donné au-dessus, dans le premier cas, le rationnel $\frac{a}{b}$ est considéré comme les a-bièmes, et dans le deuxième cas il est considéré comme a divisé par b, c'est-à-dire comme le nombre b fois plus petit que a.

Le calcul du quotient dans une division peut être envisagé à travers deux « gestes mentaux » différents : la division quotition et la division partition. La division quotition ou division-groupement correspond à la détermination du nombre de fois que l'on peut mettre un nombre dans un autre, en calculant par paquets. Le raisonnement sous-jacent de base est dans cette situation l'addition réitérée et la multiplication, ce qui amènera ensuite à la construction de la

division. La division partition, ou division-partage correspond à la détermination de la valeur d'un paquet, si l'on connaît par avance le nombre de paquets identiques dans une collection.
La différence entre les deux est exprimée de manière plus éloquente dans l'exemple donné par Brissiaud (2017) dans la présentation du manuel J'apprends les maths CM2 :

> Pour diviser 27 847 par 4 (division par un nombre à 1 chiffre), par exemple, les enfants peuvent penser à un scénario de partages successifs des milliers, centaines, dizaines et unités comme celui-ci :
> — Partage des milliers : 27 milliers partagés en 4, cela fait 6 pour chacun et 3 milliers restent à partager.
> — Partage des centaines restantes : les 3 milliers restants et les 8 centaines qu'on avait au départ font 38 centaines à partager en 4, etc.
> Ce premier « geste mental » est celui qu'on utilise lorsqu'on « pose » cette division par écrit. Présentons l'autre « geste mental de base ». Si l'on doit diviser 903 par 125, par exemple, cela n'aide guère de s'imaginer le partage de 903 objets entre 125 personnes. Il convient mieux de chercher : « Avec 903 objets, combien peut-on former de groupes de 125 ? » ou encore « En 903, combien de fois 125 ? », ce qui correspond au geste de la division par quotition (groupement). Comme 7 fois 125 = 875, le quotient est 7 et le reste 28 (2017, p.2).

Les exemples numériques choisis sont ici judicieux. Lorsque l'on divise un grand nombre a par un petit nombre b, il est avantageux d'utiliser des partages successifs (milliers, centaines, etc) et donc de considérer la division partition, alors que lorsque l'on effectue une division où le quotient trouvé sera petit, il est plus intéressant de chercher à répondre à la question : « En a combien de fois b ? » et de considérer la division quotition.
Au niveau des apprentissages, comprendre la division, c'est comprendre l'équivalence de ces deux démarches.
Comme décrit par Margolinas (2020), « la division, en tant qu'opération qui à deux nombres fait correspondre un troisième nombre n'est pas toujours possible dans $\mathbb{N}$ », l'ensemble des nombres entiers. On peut diviser 12 par 3 et obtenir un nombre entier, en revanche, on ne peut pas obtenir un nombre entier en divisant 10 par 3. La division euclidienne permet de faire ce dernier partage avec l'utilisation du reste, mais le résultat est alors donné sous forme de deux nombres (le quotient et le reste) et non pas d'un seul, ce qui ne confère pas à la division euclidienne la qualité d'être une opération au sens strict du terme, c'est bien davantage une relation à interpréter. Pour autant, comme remarqué par Allard (2015), « cela contribue à faire comprendre que le reste d'une division euclidienne peut s'exprimer par une écriture

fractionnaire, le numérateur étant le reste trouvé dans la division euclidienne correspondante et le dénominateur étant le diviseur. » Par exemple, pour la division euclidienne de 10 par 3 : $10 = 3 \times 3 + 1$ (le quotient est égal à 3, et le reste est égal à 1), ainsi $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$; nous nommerons ce type d'écriture « nombre mixte » dans la suite de notre étude. Finalement, pour résoudre ce problème de division de manière exacte, il faudra faire appel à l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$: a et b étant deux nombres entiers relatifs (avec b non nul), il existe un nombre rationnel q tel que : $q \times b = a$ que l'on note $q = \frac{a}{b}$ (Margolinas, 2020). Le nombre $\frac{a}{b}$ est le résultat (le quotient) de la division exacte $a \div b$.

4 ÉTUDE DE TRANSPOSITION

Cette partie propose une analyse du savoir à enseigner présent dans les documents officiels du cycle 3 en lien notamment avec les différents sens de la fraction identifiés dans notre étude épistémique. Ensuite nous analyserons comment ce savoir à enseigner est apprêté dans les manuels scolaires, en menant plus spécifiquement une analyse praxéologique des manuels de cycle 3 à propos du sens « quotient » pris par la fraction.

4.1 La progression dans les documents officiels au cycle 3

Au cours du cycle 2, les activités mathématiques proposées aux élèves ne font intervenir que des nombres entiers, même si certains problèmes concernant les grandeurs et mesures, par exemple lors du calcul du double et de la moitié, ou encore du triple et du tiers, laissent déjà percevoir les insuffisances de ces nombres.

D'après le programme du cycle 3 publié au B.O. n°31 du 30 juillet 2020 (2020 a, p. 92) :

> Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée. Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel.

Les attendus de fin de cycle 3 au niveau des fractions sont précisées dans ce même B.O. (2020 a, p.93). Nous rajoutons en italique les liens avec les différents sens de la fraction :

> — Connaître diverses désignations des fractions : orales, écrites et décompositions additives et multiplicatives (ex : quatre tiers ; 4/3 ; 1/3+1/3+1/3+1/3 ; 1+1/3 ; 4x1/3).
>
> — Connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateurs de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique

(ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par 1/2). *C'est une référence au sens « opérateur » de la fraction.*

— Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs. *C'est une référence au sens « partie-tout » de la fraction.*

— Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée. *Ceci peut être mis en lien avec le sens « mesure » de la fraction.*

— Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs.

— Comparer deux fractions de même dénominateur.

— Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

— Connaître des égalités entre des fractions usuelles (exemples : 5/10=1/2 ; 10/100=1/10 ; 2/4=1/2). *Ceci peut être mis en lien avec le sens « rapport » de la fraction.*

— Utiliser des fractions pour exprimer un quotient. *C'est une référence au sens « quotient » de la fraction.*

La mise en œuvre de progressions pour atteindre ces attendus de fin de cycle est détaillée dans les « Repères annuels de progression pour le cycle 3 en Mathématiques » du Ministère de l'Éducation Nationale (2020 b).

Dès le début du CM1, les élèves utilisent des fractions simples supérieures ou inférieures à 1, ces fractions rendant compte d'un partage de grandeurs (et en particulier du partage de l'unité). C'est l'interprétation de la fraction « partie-tout » qui est ici mobilisée. Ensuite les fractions décimales sont travaillées, prennent le statut de nombre, et sont positionnées sur une droite graduée (le positionnement sur la droite numérique mobilise le sens « mesure » de la fraction). Puis la comparaison de fractions de même dénominateur est traitée. Les élèves effectuent également des opérations simples avec les fractions décimales : addition de fractions décimales de même dénominateur. Ils décomposent aussi une fraction décimale sous la forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction décimale inférieure à 1. En mettant en relation les fractions décimales et l'écriture à virgule des nombres décimaux, les élèves utilisent les nombres décimaux avec au plus deux décimales. De plus, ils connaissent l'écriture décimale de fractions simples, en utilisant le passage par les fractions décimales et peuvent calculer la moitié d'un nombre entier sur des petits nombres : $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$. Par ailleurs en fin de CM1, la multiplication et la division par 10 sont travaillées sur les nombres décimaux au niveau du calcul mental.

En CM2, les élèves apprennent à diviser un nombre décimal (entier ou non) par 100, et parallèlement ils étendent le registre des fractions travaillées en CM1. La décomposition d'une fraction décimale vue en CM1 est étendue aux autres fractions (somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1). Les fractions de type $\frac{1}{1000}$ sont à présent utilisées, ce qui induit que au niveau du travail avec les décimaux, les nombres manipulés peuvent avoir jusqu'à trois décimales. L'écriture décimale de fractions simples est consolidée ($\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$; $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$), tout comme le calcul de la moitié d'un nombre entier. À partir du milieu d'année scolaire environ, la notion de pourcentage (sens « opérateur » de la fraction) est introduite dans des cas simples dans la résolution de problèmes et mise en lien avec la fraction d'une quantité (50 % pour la moitié, etc.). Au niveau de la proportionnalité, des cas simples de problèmes d'échelle sont travaillés (sens « rapport » de la fraction). En géométrie, les élèves sont capables d'agrandir et de réduire une figure en utilisant un rapport simple, en particulier, ils peuvent utiliser le rapport $\times\frac{1}{2}$.

En 6e, les fractions comme opérateur de partage déjà vues en CM1 et CM2 sont réactivées en début d'année, tout comme les fractions décimales en lien avec les nombres décimaux ; les élèves additionnent des fractions décimales de même dénominateur. En milieu d'année, l'addition est étendue aux fractions de même dénominateur inférieur ou égal à 5, en favorisant les calculs faits à l'oral. Dans la dernière partie de l'année de 6e, le sens « quotient » pris par la fraction est défini de sorte que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a (c'est la définition du quotient de a par b). D'autre part, tout au long de l'année, dans la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité, les procédures déjà vues sont remobilisées et enrichies (et par conséquent les différentes interprétations de la fraction également), le coefficient de proportionnalité est utilisé de manière explicite, et les élèves appliquent des pourcentages dans des registres variés. En géométrie, les élèves agrandissent et réduisent une figure en utilisant à présent un rapport plus complexe qu'en CM2, et ils peuvent produire une figure à une échelle donnée.

Conclusion

Les repères de progression étant très détaillés, nous observons que les différentes interprétations de la notion de fraction sont prescrites avec une grande progressivité dans les apprentissages dès le CM1, mais que la fraction « quotient » ne transparaît que de manière intuitive avec l'écriture décimale de fractions simples, en lien avec la division par 10 ou 100 ; la fraction « quotient » est véritablement définie et travaillée à la fin du cycle 3, en 6e.

Par ailleurs, nous remarquons que le document officiel d'accompagnement « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 » du Ministère de l'Éducation Nationale (2016), met en évidence dans la page 4, la différence entre l'écriture décimale d'un nombre et la notion de nombre décimal. L'écriture décimale d'un nombre rationnel est soit finie (comme 2 ou 3, 18), soit illimitée et périodique avec un certain nombre de chiffres qui se répètent à l'infini (comme 0,333… qui est égal à $\frac{1}{3}$). L'écriture décimale d'un nombre irrationnel est illimitée et non périodique (comme π ou $\sqrt{2}$). L'écriture décimale est donc une représentation d'un nombre en base 10, c'est une représentation parmi d'autres et celle-ci n'est pas toujours bien adaptée à certains nombres. Par exemple $\frac{1}{3}$ exprimé en base 10 donne $\frac{1}{3}$ = 0,333… avec des « 3 » qui se répètent à l'infini ; on aurait pu choisir d'exprimer $\frac{1}{3}$ en base 3, on aurait alors $\frac{1}{3}$ = 0,1. L'écriture selon les puissances de la base donne ici une écriture finie, ce qui n'est pas le cas en base 10, mais ensuite dans la mise en œuvre de calculs, d'autres difficultés surgiraient. D'autre part, dans le document précité, un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Il s'ensuit que l'écriture décimale d'un nombre décimal est finie. En France, l'écriture décimale d'un nombre et un nombre décimal sont deux choses distinctes.

Après ces diverses considérations, nous décrivons et analysons la manière dont sont présentes les cinq interprétations de la fraction et en particulier le sens « quotient », dans les manuels français, ces manuels étant un outil essentiel pour les enseignants dans la mise en œuvre effective du programme dans les classes. Nous allons donc mener une analyse praxéologique du savoir apprêté dans cinq manuels de cycle 3 (deux de CM2 et trois de 6e) à propos du sens « quotient » de la fraction.

4.2 Analyse praxéologique

En France, le ministère de l'Éducation Nationale produit la documentation officielle concernant les programmes, cependant il n'exerce aucun contrôle quant aux contenus des ouvrages scolaires. Les maisons d'édition rédigent leurs manuels sur la base de la documentation officielle, celle-ci est diversement interprétée par des auteurs qui sont en général des enseignants expérimentés. Au niveau de chaque établissement, les manuels sont choisis par le conseil d'enseignement, conseil qui regroupe les enseignants d'une même discipline. Chaque établissement fait donc un choix de manuel indépendant. L'analyse praxéologique sera menée sur quelques manuels de 6e, puisque c'est en 6e que l'interprétation du sens « quotient » de la fraction prend toute sa dimension. Mais avant cela, nous avons voulu porter un regard sur les différentes interprétations de la fraction abordées en CM2 dans les manuels, et sur la manière dont était préparée l'interprétation « quotient » de la fraction.

4.2.1 Les interprétations de la fraction en CM2 et le sens « quotient »

Un premier manuel consulté est : **Au rythme des maths CM2** (Hélayel, J., et al., 2020). Dans le chapitre sur les fractions de la partie « nombres et calculs », les interprétations privilégiées sont la fraction « partie-tout » et la fraction « mesure ». La définition de la fraction n'est présentée qu'à travers le partage d'une grandeur continue (partage d'un disque), et elle n'est pas énoncée sur une grandeur discrète. La fraction « opérateur » est présente dans le chapitre sur la proportionnalité de la partie « nombres et calculs », avec des calculs simples de pourcentages. Dans la partie grandeurs et mesures, un chapitre sur la proportionnalité étudie les échelles, la fraction « rapport » y est introduite par cette activité de découverte :

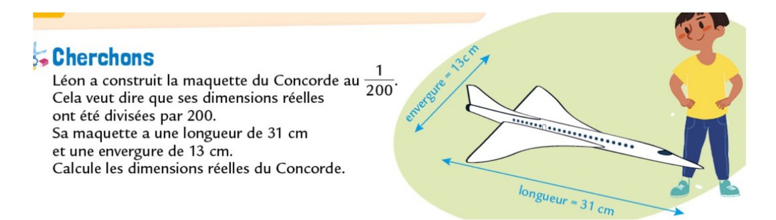


Figure 3: p.112 Au rythme des maths CM2 (Hélayel, J., et al., 2020)

L'utilisation de la fraction « rapport » $\frac{1}{200}$ est ici explicitée : on divise les dimensions par 200, mais la barre de fraction n'est pas encore véritablement associée à la division. À la suite, la partie du cours à retenir est formulée ainsi :

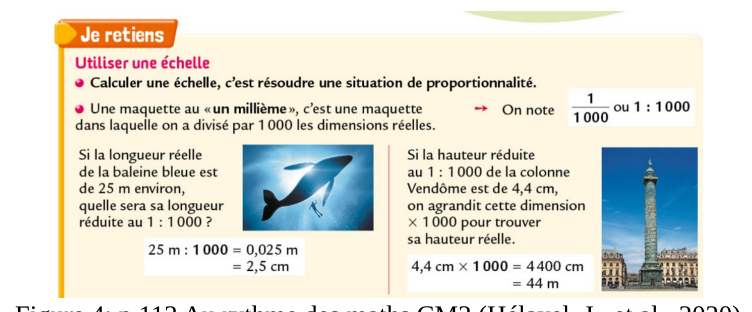


Figure 4: p.112 Au rythme des maths CM2 (Hélayel, J., et al., 2020)

L'échelle au « un millième » peut être notée $\frac{1}{1\,000}$ ou 1 : 1 000 mais dans cette situation, il ne s'agit que d'une notation, et elle n'exprime pas le sens « quotient » de la fraction, même si dans les calculs une division par 1 000 est effectuée pour trouver la longueur réduite de la baleine. Dans ce manuel, nous avons donc trouvé les différentes interprétations de la fraction attendues, le sens « quotient » y étant préparé mais pas explicité.

Le deuxième manuel consulté est : **Outils pour les maths CM2** (Petit-Jean, I., et al., 2020). Dans le chapitre sur les fractions (dans la partie « Nombres » du manuel), la fraction est définie à travers le partage d'une grandeur continue (partage d'une bande unité), puis on retrouve le sens « partie-tout » et dans la sous-section « utiliser des fractions dans des situations de partage et de mesure », la fraction « mesure » est présente, mais aussi la fraction « opérateur ». Dans la partie « Calculs », le chapitre sur la proportionnalité fait intervenir les pourcentages de manière tout à fait similaire à celle du manuel précédent, le chapitre suivant concerne les échelles et la vitesse en mettant en jeu la fraction « rapport ». L'activité d'introduction est la suivante :

Figure 5: p.102 Outils pour les maths CM2 (Petit-Jean, I., et al., 2020)

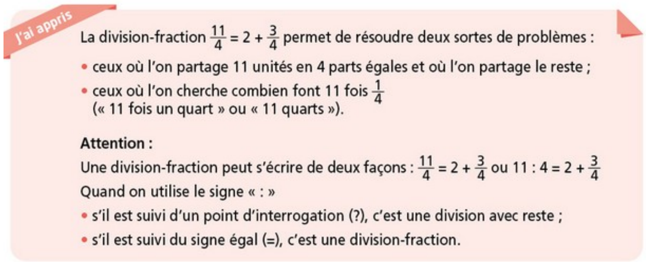
À partir des dimensions réelles de l'éolienne, l'élève est amené à découvrir que pour obtenir les dimensions de la maquette à l'échelle 1/100, il faudra diviser les dimensions par 100 (ou multiplier par 0,01). Après ces considérations, la partie cours propose de retenir :

Figure 6: p.102 Outils pour les maths CM2 (Petit-Jean, I., et al., 2020)

D'après cet encadré, l'échelle exprimée par une fraction comme 1/1 000 indique que les dimensions de la maquette sont 1 000 fois plus petites que les dimensions réelles, ce qui induit en pratique dans les calculs une division par 1 000 ou une multiplication par 0,001. Le problème d'échelle est ici traité avec la proportionnalité, mais on peut penser que c'est un problème où la fraction « rapport » prépare le sens « quotient » puisque très probablement, c'est une division des dimensions qui sera effectuée par les élèves.

Dans ce deuxième manuel, nous avons constaté que les différentes interprétations de la fraction prescrites par les documents officiels étaient présentes, le sens « quotient » n'y étant pas explicité.

D'autres manuels de CM2 ont été consultés, par exemple **J'apprends les maths CM2** (Brissiaud, R., et al., 2017). Dans la collection J'apprends les maths, les élèves apprennent d'abord à lire une fraction en utilisant le vocabulaire de la division dès le CM1, ainsi, $\frac{17}{3}$ se lit « 17 divisé par 3 », cette opération est appelée « division-fraction » et correspond à la fraction « quotient », elle est utilisée pour écrire des nombres mixtes. Dans le manuel de CM2 cité, le lien entre la fraction et la « division-fraction » est formulé de la sorte :



J'ai appris

La division-fraction $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ permet de résoudre deux sortes de problèmes :

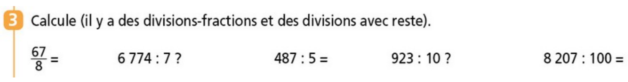
- ceux où l'on partage 11 unités en 4 parts égales et où l'on partage le reste ;
- ceux où l'on cherche combien font 11 fois $\frac{1}{4}$ (« 11 fois un quart » ou « 11 quarts »).

Attention :
Une division-fraction peut s'écrire de deux façons : $\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ ou $11 : 4 = 2 + \frac{3}{4}$
Quand on utilise le signe « : »

- s'il est suivi d'un point d'interrogation (?), c'est une division avec reste ;
- s'il est suivi du signe égal (=), c'est une division-fraction.

Figure 7: p.59 J'apprends les maths CM2 (Brissiaud, R., et al., 2017)

Un premier exercice d'application est le suivant :



3 Calcule (il y a des divisions-fractions et des divisions avec reste).

$\frac{67}{8} =$ 6 774 : 7 ? 487 : 5 = 923 : 10 ? 8 207 : 100 =

Figure 8: p.59 J'apprends les maths CM2 (Brissiaud, R., et al., 2017)

Ce manuel aborde donc le sens « quotient » pris par la fraction dès le CM2 en plus des autres interprétations de la fraction. La justification de ce choix par l'auteur est développée dans le guide pédagogique et réside dans le fait qu'il est plus facile de s'approprier l'équivalence de « trois quarts » et de « trois divisé par 4 » lorsque le sens « division » est premier que lorsque le sens « fractionnement » est premier. L'auteur donne l'exemple du partage de trois pizzas en quatre parts égales : un découpage de chacune de ces trois pizzas en quatre quarts étant fait, on prendrait une part de chacune des pizzas découpées pour obtenir 3/4. Il devient alors simple de comprendre que cette même quantité s'obtiendrait en prenant une seule pizza que l'on découperait en quatre parts égales pour en prendre trois, ce qui correspond aux trois quarts d'une pizza.

Cependant nous n'avons par ailleurs pas trouvé parmi les manuels consultés, d'autres manuels abordant le sens « quotient » de la sorte en CM2. On peut donc en conclure qu'à une exception près, le sens « quotient » pris par la fraction n'est pas explicité dans les manuels de CM2, mais que les autres interprétations sont présentes.

4.2.2 Analyse praxéologique de trois manuels de 6e

Le choix des manuels analysés a été déterminé par le fait que ce sont des manuels largement utilisés en classe de 6e (et bien représentés dans le questionnaire enseignant), ce sont aussi des manuels contrastés dans leurs approches des notions, nous avons choisi : **Myriade 6e** (Boullis, M., et al., 2021), **Transmath 6e** (Malaval, J., et al., 2022) et **Mission Indigo 6e** (Barnet, C., et al., 2021).

Dans une première partie nous avons voulu étudier le contenu des différentes activités d'introduction au sens « quotient » de la fraction de ces trois manuels, et présenter la définition choisie par chacun d'entre eux. Nous analyserons ensuite l'activité de l'élève au niveau des exercices en inspectant les différents types de tâches proposés, tout en détaillant particulièrement les tâches liées au sens « quotient ».

4.2.2.1 Définitions du sens « quotient » dans les manuels de 6e

Myriade 6e (2021)

Le chapitre sur les écritures fractionnaires est précédé des chapitres sur les nombres entiers et décimaux, et sur les opérations avec les nombres décimaux (addition, soustraction, multiplication et divisions). La première activité proposée vise dans une première partie à réactiver les connaissances des élèves sur la lecture, l'écriture et la comparaison de fractions « partie-tout ». Dans la deuxième partie de cette activité, c'est la fraction « mesure » qui est mobilisée avec l'utilisation de la demi-droite graduée où l'élève sera amené à placer des fractions, puis à en déduire l'égalité de certaines fractions. La deuxième activité est une activité de découverte du sens « quotient » de la fraction, elle se présente ainsi :

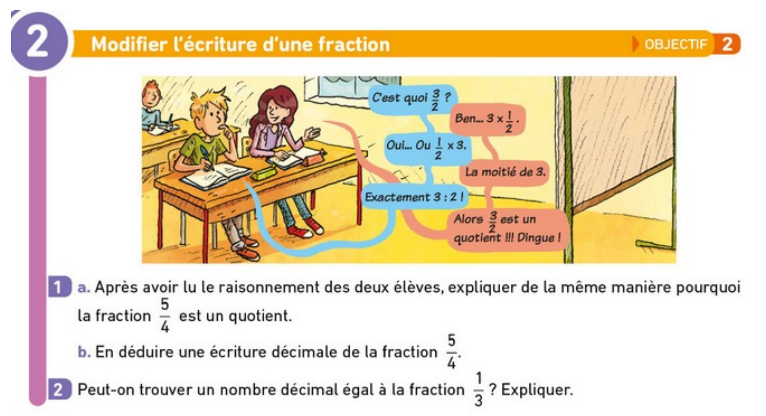
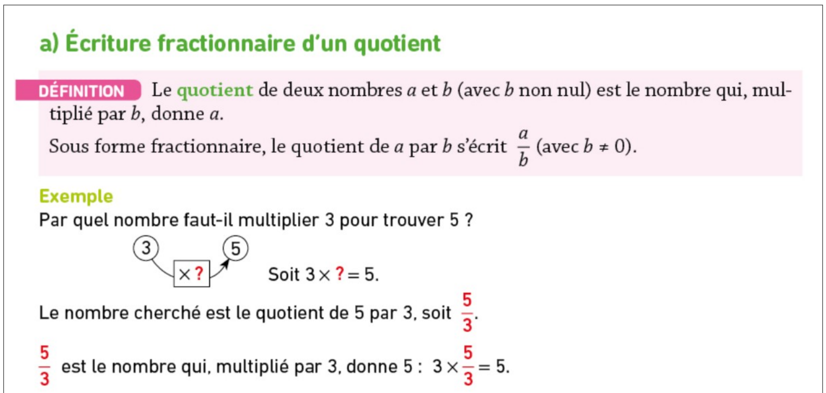


Figure 9: p.98 Myriade 6e (Boullis, M., et al., 2021)

Le dialogue mis en scène a pour but de donner du sens lors du passage de la fraction au quotient, en explicitant l'égalité $\frac{3}{2} = 3 \div 2$. Pour ce faire, la fraction $\frac{a}{b}$ est d'abord considérée comme $a \times \frac{1}{b}$ soit comme a-bièmes ensuite comme une fraction d'une quantité $\frac{1}{b} \times a$ puis comme une division $a \div b$ et enfin comme le quotient de a par b. La suite de la première partie de l'activité amène l'élève à formuler des explications calquées sur celles données précédemment pour expliquer le passage de la fraction $\frac{5}{4}$ au quotient qu'elle représente, puis le calcul du quotient est envisagé en posant la division afin d'en donner une écriture décimale. Le reste de l'activité met en évidence le cas particulier de $\frac{1}{3}$ où le nombre alors trouvé en effectuant la division n'est pas un nombre décimal, le sens « quotient » de la fraction trouve alors toute sa dimension. Implicitement la question est de savoir si toutes les fractions peuvent avoir une écriture décimale limitée et donc de savoir si toutes les fractions représentent des nombres décimaux (et peuvent donc être écrites sous forme de fractions décimales). On peut remarquer que dans cette activité ce n'est pas l'élève qui découvre, puisque la démarche à suivre est exprimée clairement. L'élève est guidé pas à pas. Cette activité ne fait pas non plus appel à la définition du quotient que l'on retrouvera ensuite formulée dans le cours, accompagnée d'un exemple (mais elle la prépare) :


a) Écriture fractionnaire d'un quotient

DÉFINITION Le **quotient** de deux nombres a et b (avec b non nul) est le nombre qui, multiplié par b, donne a.
Sous forme fractionnaire, le quotient de a par b s'écrit $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$).

Exemple
Par quel nombre faut-il multiplier 3 pour trouver 5 ?

$3 \xrightarrow{\times ?} 5$ Soit $3 \times ? = 5$.

Le nombre cherché est le quotient de 5 par 3, soit $\frac{5}{3}$.

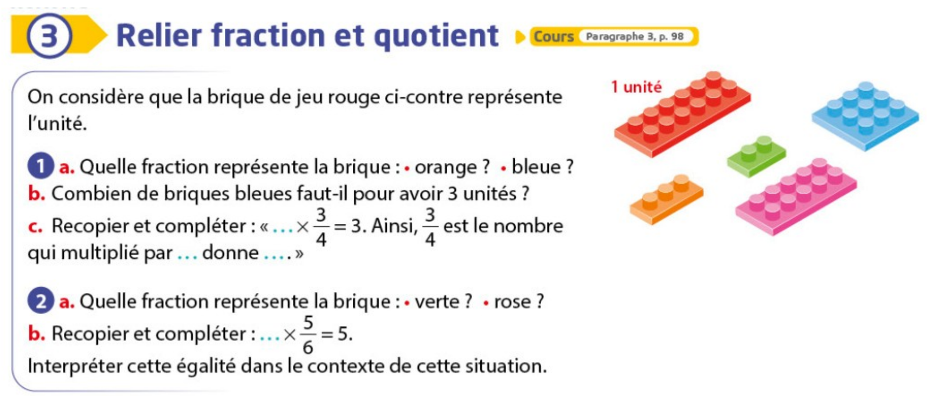
$\frac{5}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3, donne 5 : $3 \times \frac{5}{3} = 5$.

Figure 10: p.101 Myriade 6e (Boullis, M., et al., 2021)

Cette définition est conforme aux prescriptions officielles, on peut cependant remarquer que le choix a été fait de ne pas y faire apparaître le symbole de la division avec $a \div b$, alors qu'il était présent dans l'activité de découverte, mais de faire le lien avec la multiplication à trou. Il n'est pas fait non plus de référence à la différence entre la valeur décimale exacte du quotient et la valeur décimale approchée.

Transmath 6e (2022)

Comme dans le manuel précédent, le chapitre sur les fractions est précédé des chapitres sur les nombres entiers et décimaux, et sur les opérations avec les nombres décimaux. Le chapitre débute avec des questions flash pour réactiver les connaissances du CM2. Les connaissances sur le vocabulaire associé sont ravivées, ainsi que les autres interprétations de la fraction déjà rencontrées. Viennent ensuite des activités d'introduction aux savoirs développés dans cette partie. La première activité propose d'additionner des fractions ayant le même dénominateur et l'objectif de la seconde activité est de calculer la moitié d'une quantité. La troisième activité s'intitule « Relier fraction et quotient » :


3 Relier fraction et quotient ▸ Cours Paragraphe 3, p. 98

On considère que la brique de jeu rouge ci-contre représente l'unité.

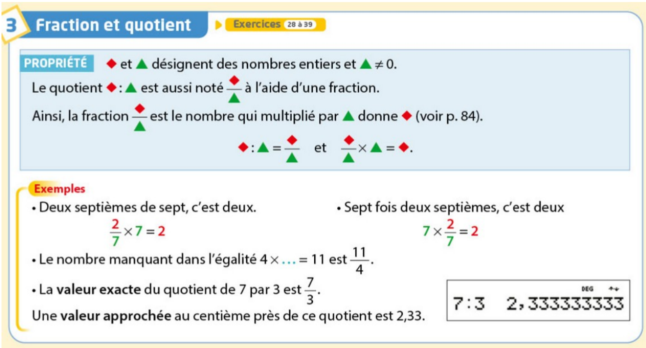
1 a. Quelle fraction représente la brique : • orange ? • bleue ?
b. Combien de briques bleues faut-il pour avoir 3 unités ?
c. Recopier et compléter : « ... $\times \frac{3}{4} = 3$. Ainsi, $\frac{3}{4}$ est le nombre qui multiplié par ... donne .... »

2 a. Quelle fraction représente la brique : • verte ? • rose ?
b. Recopier et compléter : ... $\times \frac{5}{6} = 5$.
Interpréter cette égalité dans le contexte de cette situation.

Figure 11: p.97 Transmath 6e (Malaval, J., et al., 2022)

La brique rouge représente l'unité et elle comporte 12 tenons. La question 1.a. fait appel au sens « partie-tout » de la fraction. Il y a deux procédures. L'élève peut d'abord écrire que la brique orange représente $\frac{3}{12}$ de l'unité puisqu'elle comporte 3 tenons et l'unité 12, ceci en considérant les a-bièmes $3 \times \frac{1}{12}$, ou bien, l'élève peut écrire que la brique orange représente $\frac{1}{4}$ de l'unité puisque il faudrait 4 briques oranges pour recouvrir l'unité. En considérant encore les a-bièmes, la brique bleue qui comporte 9 tenons représente $9 \times \frac{1}{12} = \frac{9}{12}$ de l'unité ; mais l'élève peut aussi considérer que l'on peut mettre trois briques oranges sur la brique bleue, auquel cas, on aura une brique bleue qui représente $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de l'unité. Dans la question 1.b., l'élève doit trouver le nombre de briques bleues à prendre pour obtenir 3 unités. Puisque une unité comporte 12 tenons, il en déduira que trois unités sont représentées par $12 \times 3 = 36$. Puis la brique bleue ayant 9 tenons, il effectuera l'opération $36 \div 9 = 4$ ce qui représente aussi $36 \times \frac{1}{9} = \frac{36}{9} = 4$. Ainsi il faudra 4 briques bleues pour avoir 3 unités, et il en découle l'égalité $\frac{36}{9} = 36 \div 9 = 4$. Il faut donc 4 briques représentant $\frac{3}{4}$ d'unités pour obtenir

3 unités. La question 1.c. a pour but de formaliser ce résultat avec d'abord une écriture mathématique à compléter, puis avec la verbalisation adaptée à compléter également : « $\frac{3}{4}$ est le nombre qui multiplié par 4 donne 3 ». La question 2 n'est qu'une nouvelle interprétation du calcul effectué pour s'assurer que la démarche est bien comprise. À partir de ces problèmes concrets, l'élève doit verbaliser la situation et relier mathématiquement fraction et quotient. Cependant la tâche que l'élève effectue autour du sens « quotient » est de trouver par quel nombre b il faut multiplier $\frac{a}{b}$ pour obtenir a, les autres situations ne sont pas envisagées. Cette activité introduit la définition du sens « quotient » pris par la fraction sans l'associer directement au symbole de la division, contrairement à l'activité de découverte du manuel précédent, mais il apparaît ensuite dans la partie cours associée à cette activité :



3 Fraction et quotient ▶ Exercices 28 à 39

PROPRIÉTÉ ◆ et ▲ désignent des nombres entiers et ▲ ≠ 0.

Le quotient ◆ : ▲ est aussi noté $\frac{\blacklozenge}{\blacktriangle}$ à l'aide d'une fraction.

Ainsi, la fraction $\frac{\blacklozenge}{\blacktriangle}$ est le nombre qui multiplié par ▲ donne ◆ (voir p. 84).

$$\blacklozenge : \blacktriangle = \frac{\blacklozenge}{\blacktriangle} \quad \text{et} \quad \frac{\blacklozenge}{\blacktriangle} \times \blacktriangle = \blacklozenge.$$

Exemples

- Deux septièmes de sept, c'est deux. $\frac{2}{7} \times 7 = 2$
- Sept fois deux septièmes, c'est deux $7 \times \frac{2}{7} = 2$
- Le nombre manquant dans l'égalité $4 \times \ldots = 11$ est $\frac{11}{4}$.
- La **valeur exacte** du quotient de 7 par 3 est $\frac{7}{3}$.

Une **valeur approchée** au centième près de ce quotient est 2,33.

7:3 2,333333333

Figure 12: p.98 Transmath 6e (Malaval, J., et al., 2022)

Cette définition est une autre interprétation des programmes officiels, car le choix a été fait ici de ne pas utiliser de lettres dans la définition, mais des symboles. Le symbole de la division est ici présent et relié à l'écriture décimale de manière implicite, et de plus, la valeur exacte du quotient et la valeur approchée sont évoquées dans les exemples qui l'accompagnent.

Mission Indigo 6e (2021)

Comme dans les deux manuels précédents, le chapitre sur les fractions est précédé des chapitres sur les nombres entiers et décimaux, et sur les opérations avec les nombres décimaux, mais en plus de cela, le chapitre sur la proportionnalité est traité avant le chapitre sur les fractions. Le chapitre sur la proportionnalité ne sera donc pas l'occasion d'utiliser les fractions pour résoudre des problèmes. Le chapitre sur les fractions est introduit avec une série de questions flash visant à réactiver les connaissances des élèves de la fraction « partie-tout », et du vocabulaire associé (numérateur, dénominateur) ; des comparaisons de nombres entiers et décimaux y figurent, ainsi que des multiplications à trous. Nous retrouverons ce même type de multiplications à trous au tout début de l'activité pour introduire le sens « quotient » pris par la fraction, activité située immédiatement après ces questions flash :

Activité 1 **Rob, le robot sauteur**

Timoko doit compléter les égalités suivantes.
① 4 × … = 20 ② 7 × … = 0 ③ 2 × … = 1 ④ 4 × … = 3 ⑤ 3 × … = 5

1. Compléter les égalités ① et ②.

Figure 13: p.118 Mission Indigo 6e (Barnet, C., et al., 2021)

Dans la première question de l'activité, l'élève ne complète que les deux premières égalités, ce qui fait appel à ses connaissances de CM2, cette situation est connue des élèves et ne fait intervenir que des nombres entiers (pourtant l'élève de CM2 devrait pouvoir compléter la troisième également). La suite de l'activité étudie les déplacements d'un robot sauteur placé au début d'une demi-droite graduée :

2. Timoko fait ensuite appel à Rob, un robot sauteur qui se déplace sur une demi-droite graduée en partant de 0 et en faisant des bonds dont on peut fixer la longueur en réglant deux mollettes A et B.
Il règle la molette A sur 1 et la molette B sur 2.
a. Compléter la phrase : « Rob atteint le nombre 1 en faisant 2 bonds de longueur … ».
b. Compléter l'égalité ③.

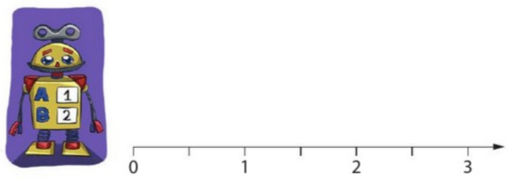


Figure 14: p.118 Mission Indigo 6e (Barnet, C., et al., 2021)

Le robot sauteur se déplace par bonds, la longueur des bonds étant déterminée par deux variables (les mollettes) A et B. Dans cette question, A prend la valeur 1 et B la valeur 2. Pour compléter la phrase de la question 2.a., « Rob atteint le nombre 1 en faisant 2 bonds de longueur… », l'élève sera amené à associer la longueur d'un bond à $\frac{1}{2}$, ce qui veut dire que la variable A correspond au numérateur de la longueur du bond (le nombre de parts prises dans un partage de l'unité), et que la variable B correspond au dénominateur de la longueur du bond (indiquant le nombre de parts égales découpées dans l'unité). Une autre réponse correcte serait également de dire que « Rob atteint le nombre 1 en faisant 2 bonds de longueur 0,5 » ce qui permet de refaire le lien $\frac{1}{2} = 0{,}5$ connu du primaire (mais ce n'est pas le but de l'activité). Dans la question 2.b., l'élève pourra compléter l'égalité 3 du début de l'activité en écrivant $2 \times \frac{1}{2} = 1$, il aura alors complété une multiplication à trou avec une fraction, en d'autres termes, il a trouvé par quel nombre il faut multiplier a pour obtenir b : $\frac{a}{b}$. L'activité se poursuit en donnant d'abord la longueur du bond :

3. Timoko règle les molettes A et B pour que Rob fasse des bonds de longueur $\frac{3}{4}$.
a. Quel est le premier nombre entier que Rob atteindra ?
b. Compléter la phrase : « Rob atteint le nombre … en faisant … bonds de longueur $\frac{3}{4}$ ».
c. Compléter l'égalité ④.

Figure 15: p.118 Mission Indigo 6e (Barnet, C., et al., 2021)

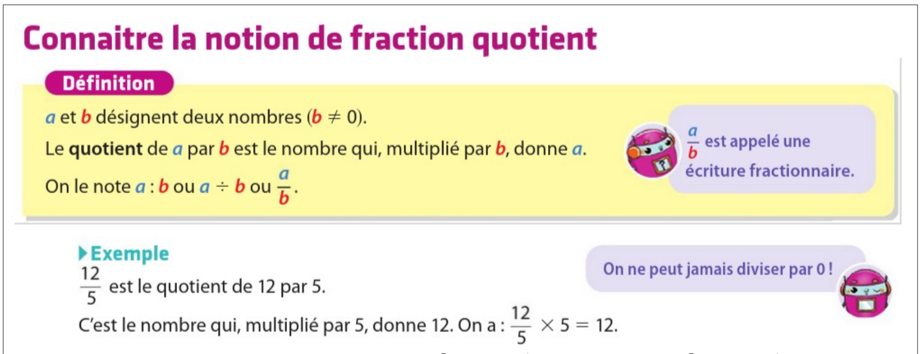
Dans la question 3.a., l'élève constatera que le premier nombre entier atteint est 3, ce qui lui permettra ensuite de compléter la phrase de la question 2.b. : « Rob atteint le nombre 3 en faisant 4 bonds de longueur $\frac{3}{4}$ », ce qui se traduira par une égalité mathématique dans la question 3.c. : $4 \times \frac{3}{4} = 3$. L'élève a alors trouvé par quel nombre entier il faut multiplier $\frac{a}{b}$ pour obtenir un nombre entier. Dans la dernière partie de l'activité, la longueur du bond fait par le robot n'est pas explicitée, mais elle est indiquée graphiquement sur la demi-droite graduée, et les variables A et B sont inscrites sur le corps du robot :

4. Timoko règle les molettes A et B pour que Rob fasse des bonds comme sur la figure ci-contre.
a. Compléter la phrase : « Rob atteint le nombre … en faisant … bonds de longueur … ».
b. Compléter l'égalité ⑤.

Figure 16: p.118 Mission Indigo 6e (Barnet, C., et al., 2021)

Il faudra donc d'abord exprimer la longueur du bond sous forme de fraction (on a donc le sens « quotient » dans un contexte de partage), pour ensuite compléter la phrase « Rob atteint le nombre 5 en faisant 3 bonds de longueur $\frac{5}{3}$ » et l'égalité mathématique $3 \times \frac{5}{3} = 5$. Dans cette dernière partie, tous les nombres mis en jeu peuvent être lus dans l'énoncé, mais la difficulté réside dans le fait de bien ordonner le calcul en y mettant du sens pour s'approprier la notion. On peut remarquer que dans cette partie, la longueur d'un bond n'est pas un nombre décimal, ce qui permet de donner un sens aux nombres rationnels non décimaux.

Cette activité de découverte du sens « quotient » de la fraction est celle qui nous semble la plus complète au regard des activités des deux manuels précédents, puisque toutes les situations sont envisagées (chercher a / chercher b / chercher $\frac{a}{b}$), tout en verbalisant et en écrivant des égalités mathématiques, ceci sans associer directement le sens « quotient » au symbole de la division. Dans la partie cours relatif au sens « quotient » pris par la fraction, le symbole de la division est pourtant présent :



Connaitre la notion de fraction quotient

Définition

a et b désignent deux nombres ($b \neq 0$).

Le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

On le note $a : b$ ou $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b}$ est appelé une écriture fractionnaire.

Exemple

$\frac{12}{5}$ est le quotient de 12 par 5.

C'est le nombre qui, multiplié par 5, donne 12. On a : $\frac{12}{5} \times 5 = 12$.

On ne peut jamais diviser par 0 !

Figure 17: p.120 Mission Indigo 6e (Barnet, C., et al., 2021)

À la suite, une remarque indique que le quotient n'est pas toujours un nombre décimal, et produit un exemple sur la valeur décimale exacte du quotient et sur la valeur décimale approchée.

4.2.2.2 Analyse praxéologique

Nous avons choisi de circonscrire notre analyse uniquement au chapitre des fractions des trois manuels de 6e choisis, par conséquent les parties des manuels faisant intervenir les fractions dans les calculs de pourcentages ou d'échelles abordés plus tard dans la progression ne sont pas pris en compte. Les activités d'introduction et les exercices déjà résolus ne sont pas pris en considération non plus (les exercices résolus donnent cependant des indications quant aux types de tâches et sous-types de tâches qui seront abordés ensuite dans les exercices). Les problèmes ouverts et les tâches complexes ont été étudiés dans la mesure du possible, c'est-à-dire s'il n'y avait pas une multiplicité de différentes démarches de résolution envisageables, faisant obstacle au comptage du type de tâches. Par exemple, dans un problème, un labyrinthe est proposé, et pour sortir du labyrinthe, il faut aller de l'entrée à la sortie en ne passant que par des cases comportant des nombres égaux :

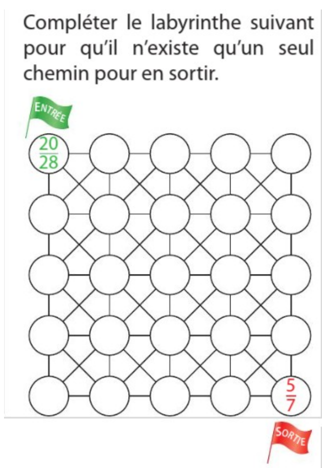


Figure 18: p.134 Mission Indigo 6e (Barnet, C., et al., 2021)

Ici le type de tâches est identifié comme « résoudre un problème faisant intervenir le sens « rapport » de la fraction » puisque nous considérerons les écritures de quotients égaux comme concourant au sens « rapport ». Pourtant il semble difficile de compter le nombre d'itérations de ce type de tâches effectuées par l'élève dans cette situation puisqu'on peut facilement imaginer qu'il y aura un certain nombre d'essais avant la résolution finale.

Les problèmes faisant intervenir l'utilisation d'un logiciel sont examinés lorsqu'il s'agit bien de l'activité de l'élève, et non pas l'activité du logiciel.

Les types de tâches ont été définis en lien avec les différentes interprétations de la fraction. Soit :

- O le type de tâches « résoudre un problème faisant intervenir le sens « opérateur » de la fraction ». Exemple : Calculer les $\frac{2}{3}$ de 2 heures.
- R le type de tâches « résoudre un problème faisant intervenir le sens « rapport » de la fraction ». Nous avons ici considéré que le fait d'écrire des quotients égaux relevait du sens « rapport ». Exemple : Recopier et compléter $\frac{2}{3} = \frac{...}{12}$.
- P le type de tâches « résoudre un problème faisant intervenir le sens « partie-tout » de la fraction ». Exemple : indiquer la fraction du polygone qui a été colorée

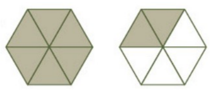


Figure 19: p.101 Myriade 6e (Boullis, M., et al., 2021)

- M le type de tâches « résoudre un problème faisant intervenir le sens « mesure » de la fraction ». Nous avons inclus à cet endroit le travail sur la droite numérique (placer un point d'abscisse donnée ; lire l'abscisse d'un point sur la droite numérique). Exemple :

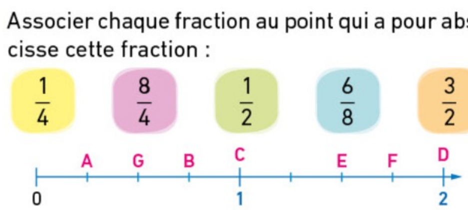


Figure 20: p.103 Myriade 6e (Boullis, M., et al., 2021)

- Q le type de tâches « résoudre un problème faisant intervenir le sens « quotient » de la fraction ». Exemple :

Recopier et compléter avec le signe ≈ ou = .

a. $\frac{16}{3} \dots 5{,}333$ **b.** $\frac{29}{14} \dots 2{,}071$

c. $\frac{45}{25} \dots 1{,}8$ **d.** $\frac{17}{20} \dots 0{,}85$

e. $\frac{36}{98} \dots 0{,}367$ **f.** $\frac{54}{36} \dots 1{,}5$

Figure 21: p.125 Mission Indigo 6e (Barnet, C., et al., 2021)

Puisque nous avons choisi d’étudier l’activité de l’élève autour du sens « quotient » pris par la fraction, nous avons décomposé ce type de tâches en plusieurs sous-types de tâches.

Concernant le type de tâche Q, nous nommons donc :

- Q1 le sous-type de tâches « Trouver le nombre qui multiplié par b donne a »
- Q2 le sous-type de tâches « Trouver le nombre qui multiplié par $\frac{a}{b}$ donne a », ou bien « Trouver le nombre par lequel il faut multiplier $\frac{a}{b}$ pour obtenir a »
- Q3 le sous-type de tâches « Compléter l’égalité $\dots \times b = a$ ou l’égalité $b \times \dots = a$ »
- Q4 le sous-type de tâches « Compléter l’égalité $\dots \times \frac{a}{b} = a$ ou l’égalité $\frac{a}{b} \times \dots = a$ »
- Q5 le sous-type de tâches « Compléter l’égalité $b \times \frac{a}{b} = \dots$ ou l’égalité $\frac{a}{b} \times b = \dots$ »
- Q6 le sous-type de tâches «Exprimer un quotient exact à l’aide d’une fraction ».
- Q7 le sous-type de tâches « Déterminer si un quotient est un nombre décimal ».
- Q8 le sous-type de tâches « Donner la valeur exacte d’un quotient ».
- Q9 le sous-type de tâches « Donner une valeur approchée d’un quotient ».
- Q10 le sous-type de tâches « Encadrer un quotient par deux entiers consécutifs ».
- Q11 le sous-type de tâches « Utiliser le vocabulaire du quotient ».

Nous avons aussi voulu caractériser le reste de l’activité de l’élève pour mieux répondre à notre question de recherche QR2 : Comment, à partir du savoir défini comme étant à enseigner ce savoir est-il apprêté dans les manuels scolaires ? Nous pourrons ainsi préciser la place dévolue au sens « quotient » par rapport à l’ensemble des activités déployées.

Pour ce faire, nous avons appelé :

- Comp le type de tâches « Comparer deux fractions ayant le même dénominateur ».
- SD le type de tâches « Additionner ou soustraire deux fractions ayant le même dénominateur ».
- V le type de tâches « Utiliser le vocabulaire autour de la fraction ».

Les résultats sont les suivants :

Manuel	Total	O	R	P	M	Q	Comp	SD	V
Indigo	456	4	174	0	73	122	59	2	22
Myriade	414	130	96	56	47	42	20	17	6
Transmath	245	71	8	12	1	74	5	66	8

Tableau 1: Les différents types de tâches dans les manuels

Les différentes interprétations sont représentées dans chaque manuel de manière très inégale. Le manuel Mission Indigo met explicitement l'accent sur le sens « quotient » (type de tâches Q) pris par la fraction, sur les fractions égales (type de tâches R) et sur la comparaison de fractions (type de tâches Comp) dans le plan du cours, par conséquent les interprétations que l'on retrouve le plus sont celles du « rapport », celle du « quotient » et celle de la « mesure ». On peut remarquer que c'est le sens « rapport » (type de tâches R) qui domine dans le chapitre, et non pas le sens « quotient ».

Le manuel Myriade propose une autre approche, en mettant l'accent cette fois-ci sur le calcul de la fraction d'une quantité, en plus des quotients égaux et du sens « quotient » de la fraction. Aussi, l'interprétation la plus représentée est celle de la fraction « opérateur » (type de tâches O), cette interprétation permet plus facilement la mise en œuvre d'exercices contextualisés, aussi la proportion d'exercices contextualisés est plus importante dans ce manuel que dans le manuel Indigo. Le sens « quotient » (type de tâches Q) n'arrive qu'en 5e position en ce qui concerne l'activité de l'élève.

Le manuel Transmath a choisi de mettre l'accent sur la somme et la différence de fractions, l'interprétation de la moitié d'une quantité, et sur le sens « quotient » de la fraction. Ainsi, le sens « quotient » (type de tâches Q) est prédominant dans l'activité de l'élève, le sens « opérateur » (type de tâches O) venant juste ensuite.

Ensuite, nous avons plus particulièrement étudié la place du sens « quotient » de la fraction :

Manuel	Q	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
Indigo	122	6	0	13	1	5	4	12	26	13	34	8
Myriade	42	4	1	3	0	3	2	0	21	1	6	1
Transmath	74	3	3	7	1	8	9	0	35	5	2	1

Tableau 2: La place du sens « quotient » dans les manuels

Globalement, la tâche la plus travaillée au niveau du sens « quotient » par les manuels est la tâche Q8 : « Donner la valeur exacte d'un quotient », sauf dans le manuel indigo qui accentue l'étude des comparaisons, et propose davantage d'encadrements à l'unité du quotient (type de tâches Q10). Les exercices d'appropriation du formalisme de la définition (tâches Q1 à Q5) sont finalement assez peu nombreux, cependant plus variés et denses que ceux des mêmes manuels dans des éditions précédentes, ce qui nous semble être une évolution positive. Le sens « quotient » pris par la fraction permet, en posant la division, de donner une écriture décimale exacte ou approchée de la fraction. Les élèves peuvent alors s'apercevoir que certains nombres ne peuvent s'écrire de manière exacte que sous forme fractionnaire : les nombres rationnels. Dans la partie suivante, nous nous intéresserons aux autres transpositions qui peuvent être faites de ce savoir à enseigner.

5 COMPARAISON SYNCHRONIQUE DE TRANSPOSITIONS AVEC QUELQUES AUTRES PAYS EUROPÉENS

La comparaison avec nos voisins européens nécessite de pouvoir se repérer dans les différentes structures des systèmes d'éducation. À ce titre, l'Annexe 1 permet de situer le cycle et la classe d'un élève en fonction de son âge, respectivement pour les différents pays considérés, sous forme de diagrammes. Les pays que nous avons retenus dans notre étude sont dans l'ordre d'apparition : le Danemark, l'Espagne, l'Italie, l'Allemagne et l'Angleterre. Ce choix n'a pas été guidé par des considérations didactiques particulières, mais simplement en relation avec nos plus ou moins bonnes capacités dans ces langues étrangères. Pour chaque pays, nous allons examiner les programmes officiels en essayant de déterminer à quel moment de la scolarité les différentes interprétations de la fraction sont abordées, et en particulier celle du sens « quotient », et nous allons explorer la manière dont est introduite, éventuellement définie puis utilisée cette dernière dans les manuels scolaires. Pour cela, nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur le fait que notre analyse se place d'un point de vue français. Dans le contexte français, il existe une différence importante entre le nombre et son écriture, notamment entre son écriture fractionnaire et son écriture décimale, ce qui n'est pas toujours le cas chez nos voisins. Cela entraîne parfois des difficultés de compréhension de certains passages de manuels européens pour un lecteur français, car le terme « nombre décimal » ne semble pas signifier la même chose selon les pays. Dans notre étude, nous trouverons donc des formulations qui ne seraient pas acceptables en France mais qui ont du sens dans le contexte culturel du pays en question. Il s’agit alors pour nous de les considérer et de les analyser dans le contexte dans lequel ces formulations sont faites.

5.1 Danemark

La documentation institutionnelle : quel savoir à enseigner sur les fractions au Danemark ?

La documentation officielle danoise (Børne og Undervisningsministeriet, 2019) détaille la progression par cycle, mais pas par année d’enseignement. Le cycle 2 regroupe le CM1, le CM2 et la 6e, et correspondent aux classes 4, 5 et 6 danoises (2. trinforløb). Sur le thème des nombres, le domaine des compétences et des connaissances se concentre sur la compréhension des fractions, des nombres décimaux, des nombres entiers négatifs, des pourcentages, des puissances simples et de pi.

Tout au long du processus, étape par étape, l’enseignement doit donner aux élèves l’occasion de développer une compréhension des fractions et de la structure des nombres décimaux. Le concept de fraction est à la base de la compréhension des élèves des fractions, des nombres décimaux, des pourcentages et de la description de rapports (traduction directe du document par l’auteur). La formation des concepts (fractions et décimaux) est basée sur des exemples d’utilisation de la vie courante. L’enseignement de la notion de fraction sur ce cycle porte entre autres sur :

— la relation entre les fractions et la division

— la fraction comme partie d’un tout

— la fraction sous forme de nombre sur une droite numérique

— la fraction comme indication de rapport

Le travail inclut les fractions égales pour exprimer un même nombre. Les nombres décimaux sont compris comme des représentations de fractions décimales. Les différentes écritures sont travaillées, par exemple pour déterminer la taille d’une fraction, celle-ci peut être avantageusement écrite sous forme d’un nombre décimal. Le concept de pourcentage est introduit comme une application spéciale du concept de fraction basé sur des exemples de la vie quotidienne. Au niveau du thème sur les stratégies de calcul, il est indiqué que les stratégies de calcul liées aux fractions simples, aux décimaux et aux pourcentages sont développées, mais ceci reste très vague.

En conclusion, la documentation officielle insiste sur la progressivité des apprentissages sans en préciser les modalités, et sur l'utilisation d'exemples issus de la vie courante, donc en contexte. D'après les indications données, les différentes interprétations de la fraction sont abordées dans ce cycle d'enseignement, si l'on considère que placer une fraction sur une droite numérique fait référence à la fraction « mesure », et que le travail sur les pourcentages couvre le sens de la fraction « opérateur », les autres interprétations étant explicitement nommées dans le curriculum, et en particulier, le sens quotient de la fraction. Cependant, il n'est pas précisé à quel moment ni comment cette interprétation particulière est abordée dans la progression, aussi nous avons voulu éclairer ce point à travers l'analyse de manuels.

Le savoir apprêté dans les manuels danois

Pour étudier les choix de transposition effectués dans les manuels danois, les manuels choisis sont ceux de la série Matematrix : Matematrix 6 (Gregersen et al., 2013), Matematrix 5 (Gregersen et al., 2013), et Matematrix 4 (Gregersen et al., 2012). Cette série de manuels est parmi les plus couramment utilisés au Danemark et les manuels correspondent chacun à une classe, en particulier Matematrix 4 correspond à la classe de CM1 (les suivants correspondent respectivement à la classe de CM2 et de 6e). Dans ce manuel, le chapitre sur les fractions apparaît très tôt : il est traité après le chapitre sur les nombres entiers et avant les chapitres sur la multiplication puis sur la division.

Dans le chapitre sur les fractions, toutes les différentes interprétations de la fraction sont abordées, avec cependant une prédominance de la fraction « partie-tout » et une sous-représentation de la fraction « rapport ». Le chapitre ne présente pas de définition particulière du sens « quotient » pris par la fraction, ce sens est ici abordé de façon intuitive à travers un premier problème : une orange est partagée en huit morceaux, si la masse de l'orange est 200 grammes, quelle est la masse d'un morceau ?…

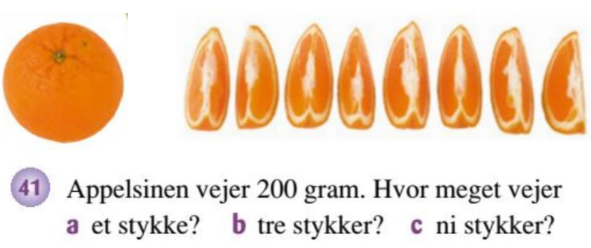


Figure 22: p.44 Matematrix 4, (Gregersen et al., 2012)

Plus loin dans le chapitre, les fractions où le numérateur est supérieur au dénominateur sont travaillées, et les exercices faisant intervenir le sens « quotient » amènent l'élève à écrire une fraction sous la forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1 :

54 Skriv brøkerne som antal hele plus antal dele.

a $\frac{9}{6}$ c $\frac{12}{6}$ e $\frac{13}{5}$ g $\frac{8}{3}$ i $\frac{10}{3}$

b $\frac{11}{6}$ d $\frac{6}{5}$ f $\frac{15}{5}$ h $\frac{9}{3}$

Figure 23: p.47 Matematrix 4, (Gregersen et al., 2012)

Dans le chapitre sur la division, le symbole de la division est associé à la barre de fraction :

17 divideret med 5 er lig med $\frac{17}{5}$, som er lig med 3 hele plus $\frac{2}{5}$

$17 : 5 = \frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$

Figure 24: p.93 Matematrix 4, (Gregersen et al., 2012)

Dans le manuel qui correspond à l'âge du CM2, Matematrix 5 (Gregersen et al., 2013), le chapitre sur les fractions se concentre sur les fractions égales et sur les opérations avec les fractions. Dans le chapitre sur la division, la vérification de l'exactitude de la division se présente sous une forme que l'on peut rapprocher de la définition du quotient en France c'est-à-dire : Le quotient de a par b ($b \neq 0$) est le nombre qui, multiplié par b donne a, on le note

$a \div b$ ou $\frac{a}{b}$ (voir Figure 25).

$15 : 4 = 3 + \frac{3}{4}$ fordi $(3 + \frac{3}{4}) \cdot 4 = 15$

Figure 25: p.87 Matematrix 5, (Gregersen et al., 2013)

Cette énonciation ne fait pas intervenir de lettres et ne se trouve que sous forme d'exemple numérique, ce qui est en adéquation avec l'âge des élèves. Dans cette formulation, l'écriture adoptée est celle utilisée par le manuel français J'apprends les maths CM2. Elle permet de donner une écriture fractionnaire de la partie décimale du quotient de la division exacte de 15 par 4. Un exemple de calcul est alors donné :

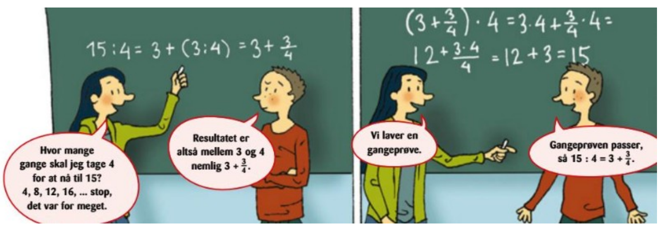


Figure 26: p.87 Matematrix 5,(Gregersen et al., 2013)

Dans Matematrix 6 (Gregersen et al., 2013), le manuel qui correspond à l'âge de la 6e débute avec un chapitre sur le calcul littéral, ce qui permettra d'écrire des formules dans le chapitre sur les fractions où le reste des opérations sont étudiées (multiplication, division de fractions). Dans ce manuel, on trouve à propos de l'écriture décimale :

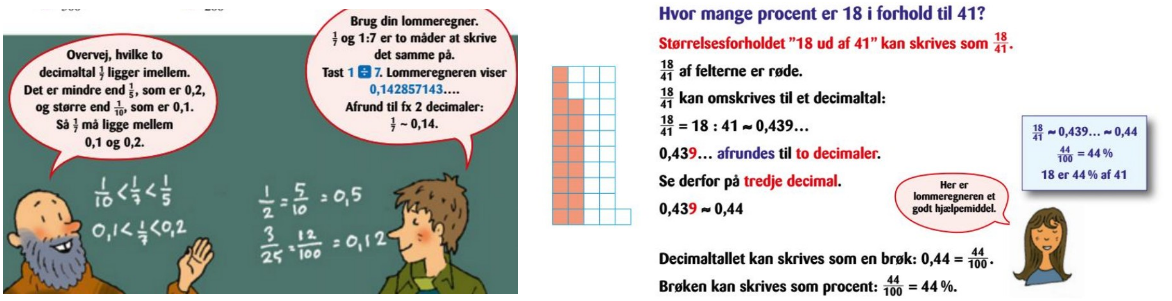


Figure 27: p.73 Matematrix 6,(Gregersen et al., 2013) p.77 Matematrix 6,(Gregersen et al., 2013)

À gauche de l'encadré, dans le chapitre sur les fractions où il est question de donner l'écriture décimale d'une fraction, il est conseillé d'abord d'encadrer la fraction par deux nombres décimaux, puis d'utiliser la calculatrice pour en donner une valeur approchée. Cette technique permet de donner une écriture décimale approchée des nombres rationnels non décimaux sans avoir à aborder la question de la période de l'écriture décimale exacte de ces nombres.

À droite de l'encadré, dans le chapitre sur les pourcentages, il est indiqué après la question que le rapport de grandeur entre 18 et 41 peut s'écrire $\frac{18}{41}$, puis que $\frac{18}{41}$ des cases sont rouges, et ensuite : « $\frac{18}{41}$ kan omskrives til decimaltal : $\frac{18}{41} = 18 \div 41 \approx 0{,}439\ldots$ » dont la traduction littérale est : « $\frac{18}{41}$ peut-être réécrit sous la forme d'un nombre décimal » puisque « tal » en danois veut dire « nombre ». Mais ce qui est appelé « nombre décimal » au Danemark correspond à ce que nous appelons « écriture décimale » en France. Une traduction adaptée à la France serait donc : « $\frac{18}{41}$ admet une écriture décimale ». Pour obtenir cette écriture décimale, on effectue la division en s'arrêtant à un rang après la précision souhaitée et l'on peut ensuite donner une valeur approchée du résultat. Comme précisé précédemment, cette technique permet d'éviter d'aborder la question de la période de l'écriture décimale exacte des nombres rationnels non décimaux.

Conclusion

Au Danemark, l'âge d'introduction des fractions coïncide avec l'âge d'introduction de la division (CM1), on étudie d'abord les fractions et ensuite la division en associant clairement le signe de la division et la barre de fraction. Les cinq différentes interprétations de la fraction sont abordées, de plus ce n’est pas une spécificité de la série de manuels choisie, puisqu’une étude approfondie menée par Pedersen (2021) sur deux autres séries de manuels le confirment. Par contre, pour trouver une formulation de la définition du quotient qui rappelle celle que nous connaissons en France, il faut attendre l’âge du CM2, celle-ci reste très informelle et permet de vérifier l’exactitude de la division. Le sens « quotient » de la fraction est explicité en donnant une écriture décimale exacte ou approchée d’un nombre rationnel donné en écriture fractionnaire, ceci en effectuant la division et en s’arrêtant au besoin un rang après la précision souhaitée.

5.2 Espagne

La documentation institutionnelle : quel savoir à enseigner sur les fractions en Espagne ?

Les documents officiels du Ministerio de Educación y Formación Profesional concernant les savoirs à apprendre ne sont pas très détaillés et sont regroupés par cycle de deux ans, les informations recueillies sont données ci-dessous.

Les fractions font leur apparition à l’âge du CE2-CM1 (tout comme la multiplication et la division), sous forme de fractions inférieures à 1 de dénominateur pouvant aller jusqu’à 12, dans des contextes de la vie quotidienne. Elles interviennent dans les stratégies de calcul mental faisant intervenir des nombres entiers. Ordonner et comparer des nombres entiers et des fractions se fait également dans des contextes de la vie quotidienne.

Au niveau de l’équivalent CM2-6e, les fractions et les nombres décimaux sont utilisés pour exprimer des quantités dans des situations de la vie quotidienne, où le choix de la meilleure représentation est à déterminer pour chaque situation ou problème. Les stratégies de résolution d’opérations arithmétiques sont travaillées en faisant intervenir des nombres entiers, des nombres décimaux et des fractions, dans des situations contextualisées, par le biais du calcul mental, du calcul écrit posé et du calcul instrumenté. Les nombres entiers, les fractions et les nombres décimaux jusqu’aux millièmes sont comparés et ordonnés dans des contextes de la vie quotidienne. Les relations entre les fractions simples, les fractions décimales et les pourcentages sont explicitées.
La résolution de problèmes de proportionnalité inclut les pourcentages et les problèmes d’échelle.

En conclusion, la documentation officielle donne très peu d'indications quant à la mise en œuvre de la progression au niveau des fractions, et en particulier elle ne met pas en avant les différentes interprétations des fractions.

Le savoir apprêté dans les manuels espagnols

En Espagne, le système éducatif est décentralisé et organisé au niveau des régions, aussi les manuels diffèrent d'une région à l'autre, même si les indications de programme officiel restent nationales. Les manuels choisis concernent la région Grazalema. A la lumière des indications de programme, nous avons choisi d'explorer les manuels à partir de l'âge du CM2 de la série LM Plat Alumno : LM PLAT Alumno Matemáticas 5 (Almodóvar Herráis et al.,2019) pour l'âge du CM2 et LM PLAT Alumno Matemáticas *6* (Almodóvar Herráis et al.,2019) pour l'âge de la 6e.

Dans Matemáticas 5 (Almodóvar Herráis et al.,2019), on peut observer que le premier chapitre sur les fractions est placé après le chapitre sur la division et après le chapitre sur les multiples et diviseurs (dans cet ordre). Dans ce premier chapitre intitulé « Comparaison de fractions », la définition de la fraction n'est pas précédée d'activité de découverte. Le manuel propose ensuite de comparer les fractions à 1, ainsi que de comparer des fractions de même numérateur ou de même dénominateur ; le sens « partie-tout » y alors est prédominant. Puis dans cette partie, l'interprétation de la fraction comme une division est abordée de cette manière :

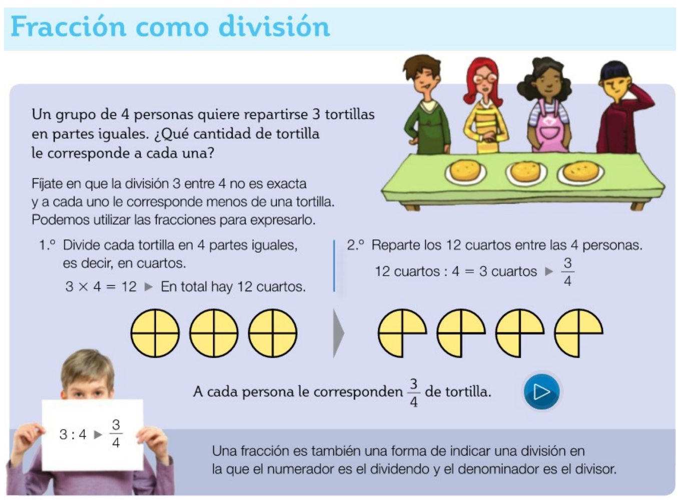


Figure 28: p.96 Matemáticas 5 (Almodóvar Herráis et al.,2019)

Dans la partie basse de l'encadré, on peut lire qu'une fraction est aussi un moyen pour indiquer une division dans laquelle le numérateur est le dividende et le dénominateur est le diviseur. Les exercices d'application qui suivent font intervenir le sens de la division sans cependant impliquer d'effectuer une division. Il s'agit de conclure en exprimant un quotient exact sous forme de fraction, comme par exemple dans l'exercice ci-dessous où il est demandé à l'élève d'expliquer sur son cahier comment partager 4 tartes entre neuf personnes, ceci en réutilisant la même démarche que celle présentée plus haut :

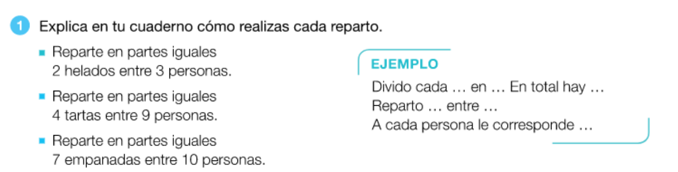


Figure 29: p.96 Matemáticas 5 (Almodóvar Herráis et al.,2019)

La suite du chapitre introduit la fraction « opérateur », avec le calcul de la fraction d'une quantité, puis enchaîne sur la notion de fraction « mesure ».

Le chapitre suivant s'intitule « Fractions équivalentes, Addition et Soustraction de fractions ».

Dans cette partie, les élèves apprennent à reconnaître et écrire des fractions égales, puis on utilise le sens quotient de la fraction dans le cas particulier où une fraction est égale à un nombre entier :

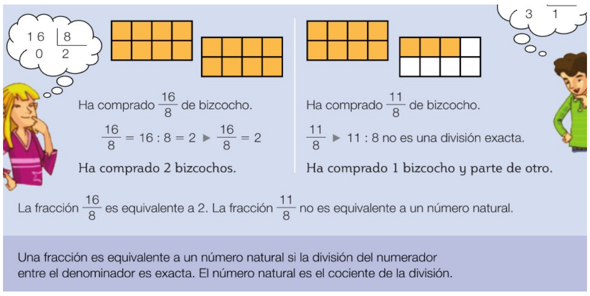


Figure 30: p.110 Matemáticas 5 (Almodóvar Herráis et al.,2019)

Dans la partie basse de l'encadré, on peut lire qu'une fraction est égale à un nombre entier si la division de son numérateur par son dénominateur est exacte. Ce nombre entier est le quotient de la division.

L'un des premiers exercices d'application propose de calculer le nombre entier égal à chaque fraction :

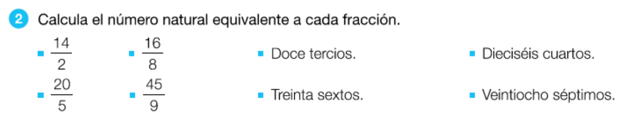


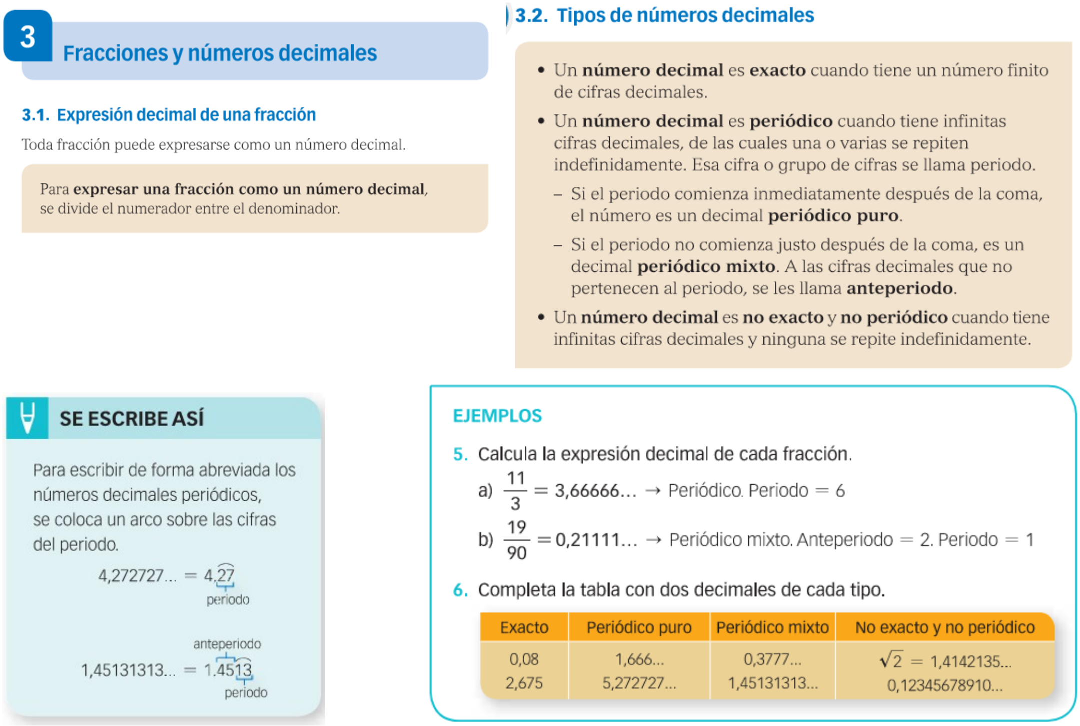
Figure 31: p.110 Matemáticas 5 (Almodóvar Herráis et al.,2019)

Dans la suite du chapitre, les nombres mixtes (somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1) ou fractions impropres (fractions supérieures à 1) utilisent également cette interprétation « quotient » de la fraction. Dans la suite du manuel, le sens « opérateur » des fractions est largement travaillé avec les pourcentages, ceci à la fin du chapitre qui introduit les nombres décimaux à partir des fractions décimales. On peut remarquer aussi que la fraction « rapport » est présente à la fin du manuel dans le chapitre sur les probabilités.

Dans le manuel correspondant à la classe de 6e, Matemáticas 6 (Almodóvar Herráis et al.,2019), le chapitre sur les fractions s'ouvre sur des rappels sur les nombres mixtes et sur les fractions égales, puis le manuel se concentre sur les opérations avec les fractions, où l'ensemble des opérations est étudié : addition et soustraction de fractions de dénominateurs différents, multiplication et division de fractions. Dans le chapitre sur la proportionnalité, les pourcentages sont revus et approfondis, la notion d'échelle est présente ; on y retrouve globalement les différentes interprétations de la fraction.

5.2.1 Conclusion

En Espagne, les premières fractions sont étudiées en CE2-CM1, mais c'est en CM2 qu'un travail important est fait au niveau des différentes interprétations de la fraction, toutes sont abordées, et au niveau du sens quotient, le symbole de la division est associé à la barre de fraction. En 6e, l'accent est mis sur l'aspect calculatoire et technique des diverses opérations. Nous n'avons pas trouvé de définition du quotient équivalente à celle que nous avons en France, ce qui peut se rapprocher de notre définition française reste, comme au Danemark, les égalités utilisées pour vérifier qu'une division est correcte. Nous pensons que ceci est sans doute lié aux choix de transposition qui ont été faits au niveau de la définition des nombres décimaux. En effet, un nombre décimal en France est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction décimale ou sous la forme d'une somme finie de fractions décimales, ce qui veut dire que l'écriture décimale de ce nombre comporte un nombre fini de chiffres après la virgule. En Espagne par contre, dans le manuel Matemáticas 2 ESO (Almodóvar Herráis et al.,2021) qui correspond à la classe de 4e (pour la région de Murcia), on trouve dans le chapitre sur les nombres décimaux ceci :



3 Fracciones y números decimales

3.1. Expresión decimal de una fracción

Toda fracción puede expresarse como un número decimal.

Para **expresar una fracción como un número decimal**, se divide el numerador entre el denominador.

SE ESCRIBE ASÍ

Para escribir de forma abreviada los números decimales periódicos, se coloca un arco sobre las cifras del periodo.

$4{,}272727... = 4{,}\underbrace{\overset{\frown}{27}}_{\text{periodo}}$

$1{,}45131313... = 1{,}\overset{\text{anteperiodo}}{45}\underbrace{\overset{\frown}{13}}_{\text{periodo}}$

3.2. Tipos de números decimales

- Un **número decimal** es **exacto** cuando tiene un número finito de cifras decimales.
- Un **número decimal** es **periódico** cuando tiene infinitas cifras decimales, de las cuales una o varias se repiten indefinidamente. Esa cifra o grupo de cifras se llama periodo.
  - Si el periodo comienza inmediatamente después de la coma, el número es un decimal **periódico puro**.
  - Si el periodo no comienza justo después de la coma, es un decimal **periódico mixto**. A las cifras decimales que no pertenecen al periodo, se les llama **anteperiodo**.
- Un **número decimal** es **no exacto** y **no periódico** cuando tiene infinitas cifras decimales y ninguna se repite indefinidamente.

EJEMPLOS

5. Calcula la expresión decimal de cada fracción.

a) $\frac{11}{3} = 3{,}66666... \rightarrow$ Periódico. Periodo = 6

b) $\frac{19}{90} = 0{,}21111... \rightarrow$ Periódico mixto. Anteperiodo = 2. Periodo = 1

6. Completa la tabla con dos decimales de cada tipo.

Exacto	Periódico puro	Periódico mixto	No exacto y no periódico
0,08 2,675	1,666... 5,272727...	0,3777... 1,45131313...	$\sqrt{2}$ = 1,4142135... 0,12345678910...

Figure 32: p.70 Matemáticas 2 ESO (Almodóvar Herráis et al.,2021)

En haut à gauche, nous pouvons lire : « Toda fracción puede expresarse como un número decimal ». Traduit de manière littérale, ceci donnerait « Toute fraction peut être exprimée sous forme d’un nombre décimal ». Avec une traduction adaptée à la culture française, on aurait plutôt : « Toute fraction admet une écriture décimale ». Toujours dans l’encadré précédent, mais cette fois-ci en haut à droite, nous pouvons lire : « Tipos de números decimales » ce qui, traduit de manière littérale donnerait : « Types de nombres décimaux », mais ce qui est décrit ensuite ne sont pas des nombres décimaux, mais des écritures décimales. Tout porte à croire qu’en Espagne, « número decimal » désigne à la fois le nombre décimal et l’écriture décimale d’un nombre. Dans cette perspective, la définition du quotient telle que nous la connaissons en France ne revêt peut-être alors pas la même importance dans ces conditions.

5.3 Italie

La documentation institutionnelle : quel savoir à enseigner sur les fractions en Italie ?

En Italie, dans le primaire et le secondaire, le système scolaire est centralisé par le ministère de l’instruction publique. Les documents relatifs aux programmes sont disponibles en ligne sur le site internet du ministère de l’instruction et du mérite : Ministero dell'Istruzione e del Merito. Le document de référence en la matière est le décret n.59 de février 2004, dont la dernière mise à jour date de 2016. C’est un document difficile à lire puisque toutes les disciplines y sont présentées, et ce, pour chaque année d’enseignement, de plus les indications données nous semblent manquer de précision.

D’après ce document, les fractions sont abordées à partir des classes « quarta » et « quinta » de la « scuola primaria », ce qui correspond à l’âge du CM1 et du CM2. Au cours de ces deux années, les savoirs concernant les quatre opérations déjà étudiées sont consolidés (ceci ne concerne pas les opérations avec les fractions bien entendu). La notion intuitive des fractions est introduite, liée à des contextes concrets et à leur représentation symbolique. Les nombres décimaux sont introduits en CM1 avec les fractions décimales. Les élèves apprennent à donner différentes écritures d’un même nombre (fraction, fraction décimale, nombre décimal) et à les positionner sur une droite graduée. Ils comparent et ordonnent les fractions les plus simples en utilisant un moyen approprié. Les documents officiels ne détaillent pas davantage le travail sur les fractions.

Au niveau de la « Scuola Secondaria di primo grado » les classes « prima e seconda » correspondent au niveau 6e-5e. C’est à ce moment, d’après les documents officiels, que les attendus incluent les fractions comme un rapport et comme un quotient. Les élèves étudient les nombres rationnels, les ratios, les pourcentages, la proportionnalité, l’écriture décimale d’un nombre rationnel, les opérations et les comparaisons avec des nombres rationnels. Ils savent écrire des fractions équivalentes et placer des nombres rationnels sur une droite numérique. Ils effectuent des opérations avec des nombres rationnels sous forme décimale, et ils effectuent des calculs simples avec des nombres rationnels en utilisant différentes méthodes et outils.

Le savoir apprêté dans les manuels italiens

Il est possible de consulter en ligne la liste des manuels utilisés dans chaque établissement (mais pas les manuels), ce qui permet de voir quels manuels sont les plus largement utilisés.

Le manuel de l’âge du CM1 choisi est Officina delle discipline Matematica 4 (Bussini, S., et al., 2019). La séquence sur les fractions est présentée après la séquence sur les quatre opérations (dont la division). Dans l’introduction, il est d’abord proposé une définition de la fraction et des exercices sur l’interprétation « partie tout ». Le vocabulaire autour de la fraction est présenté ainsi :

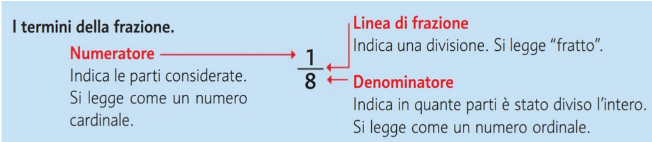


Figure 33: p.50 Officina delle discipline Matematica 4 (Bussini, S., et al., 2019)

Ici il est clairement indiqué que la ligne de fraction indique une division. Cette ligne s'appelle « fratto ». Cette division n'est cependant pas utilisée dans les exercices qui suivent, les seules interprétations de la fraction présentes dans ce manuel sont la fraction « partie-tout », la fraction « opérateur » et la fraction « mesure ».

Le manuel de l'âge du CM2 choisi est Officina delle discipline Matematica 5 (Bussini, S., et al., 2019). Dans ce manuel, le sens quotient de la fraction ne fait pas l'objet d'activités d'introduction non plus, la barre de fraction étant associé à la division tout à fait comme dans le manuel de la classe précédente. Par contre, le sens quotient y est utilisé pour donner d'abord une écriture mixte des nombres rationnels sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, puis pour comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur et pour introduire les pourcentages (ci-dessous sont présentés les deux derniers) :

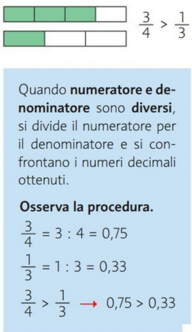


Figure 34: p.51 Officina delle discipline Matematica 5 (Bussini, S., et al., 2019)

Figure 35: p.56 Officina delle discipline Matematica 5 (Bussini, S., et al., 2019)

Dans l'encadré de gauche, nous pouvons remarquer une égalité qui ne se conforme pas à notre culture mathématique française. En effet, l'écriture décimale qui est donnée pour 1/3 est une écriture décimale approchée malgré la présence du signe « = ». Les conventions et les exigences dans l'écriture mathématique ne sont pas les mêmes dans ces deux pays à ce niveau d'enseignement. Est-ce un choix de transposition spécifique à ce manuel, ou bien ceci est-il présent dans le savoir à enseigner ? Nous estimons que les raisons d'un tel choix demanderaient à être approfondies ultérieurement.

Dans la Figure 34, le passage par l'écriture décimale, obtenue grâce à une division, permet de comparer des fractions de dénominateurs différents. Une technique plus courante en France serait de réduire au même dénominateur pour accomplir cette même tâche, ceci ne faisant pas appel à la même technologie. Dans la Figure 35, le passage par l'écriture décimale (en effectuant encore la division) est aussi un élément de technique utilisé pour exprimer un pourcentage, sans passer par l'écriture de fractions équivalentes.

Par ailleurs, les autres interprétations de la fraction sont également présentes dans le manuel comme en CM1, aussi, nous pouvons alors constater qu'à l'âge du CM2, les différentes interprétations de la fraction ont été abordées par les élèves et travaillées au travers des exercices dans ce manuel. Dans le manuel de CM1 et dans le manuel de CM2, on peut trouver dans le chapitre qui traite de la division le vocabulaire associé au quotient, mais pas de définition du quotient telle que nous la connaissons en France.

Pour compléter nos investigations, le manuel de 6e consulté est Da zero a infinito (Ferri, L., et al., 2016). Dans la troisième partie du chapitre sur les fractions, on peut trouver une activité d'introduction au sens « quotient » de la fraction : cinq amis veulent se partager deux tablettes de chocolat de manière équitable. Combien de carrés de chocolat chacun d'eux doit-il prendre ? La première méthode introduite consiste à diviser 2 par 5 et l'on obtient le nombre décimal 0,4 ; chacun doit donc prendre 0,4 d'une tablette de chocolat. On écrit ensuite 2 : 5 = 0,4. La deuxième méthode consiste à diviser chaque tablette en cinq et à donner ensuite deux morceaux à chacun (on prend donc les a-bièmes), on écrit ensuite 2 : 5 = 2/5. Il s'ensuit par transitivité que 2/5 = 0,4. L'activité est conclue en expliquant que quand la fraction est considérée de manière individuelle et non comme un opérateur, elle représente alors un quotient, c'est-à-dire un nombre :

Il numero 0,4 ottenuto nel primo caso, e la frazione $\frac{2}{5}$ ottenuta nel secondo, sono solo due modi diversi di esprimere lo stesso risultato e rappresentano, perciò, la stessa quantità.

$$2:5=0{,}4 \qquad 2:5=\frac{2}{5} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{2}{5}=0{,}4$$

Quindi la frazione, considerata singolarmente e non come operatore, rappresenta un quoziente, cioè un numero.

Figure 36: p.330 Da zero a infinito (Ferri, L., et al., 2016)

À la suite de cette activité, la définition du sens « quotient » de la fraction est écrite :

La frazione $\frac{m}{n}$ è il risultato della divisione tra il suo numeratore m e il suo denominatore n.
Essa rappresenta, quindi, il **quoziente** esatto della divisione $m:n=\frac{m}{n}$. La linea di frazione è il simbolo che sostituisce il segno di divisione.

Figure 37: p.330 Da zero a infinito (Ferri, L., et al., 2016)

Le premier exercice d'application est le suivant :

1 **Indica la risposta corretta.**

a. $\frac{4}{5} = 4 : 5 =$	☐ 4,5	☐ 0,8	☐ 5,4
b. $\frac{7}{2} = 7 : 2 =$	☐ 3,2	☐ 7,2	☐ 3,5
c. $\frac{9}{3} = 9 : 3 =$	☐ 3	☐ 0,3	☐ 0,9

Figure 38: p.331 Da zero a infinito (Ferri, L., et al., 2016)

Conclusion

Dès l'âge du CM1, la barre de fraction est associée à la division. En CM2, l'ensemble des différentes interprétations de la fraction ont été abordées. En 6e, le sens « quotient » pris par la fraction est défini de manière plus formelle, mais cette définition n'est pas l'équivalent de celle que nous connaissons en France. En Italie, comme en Espagne, un nombre décimal n'est pas forcément un nombre avec une suite finie de chiffres après la virgule. Par exemple, dans le manuel de CM2, on trouve cette définition du nombre décimal, celle-ci ne précise pas que le nombre de chiffres de la partie décimale doit être fini :

I numeri decimali sono formati da:
- una parte intera (unità, decine, centinaia, migliaia...);
- una parte decimale (decimi, centesimi, millesimi).

La **virgola** divide la parte intera da quella decimale, che forma un **nuovo periodo**.

Figure 39: p.24 Officina delle discipline Matematica 5 (Bussini, S., et al., 2019)

Ce qui peut sembler être une erreur du point de vue français se retrouve dans d'autres manuels, par exemple ici dans le manuel Senza Frontiere 5 Matematica (Tordella, A., et al., 2022) :

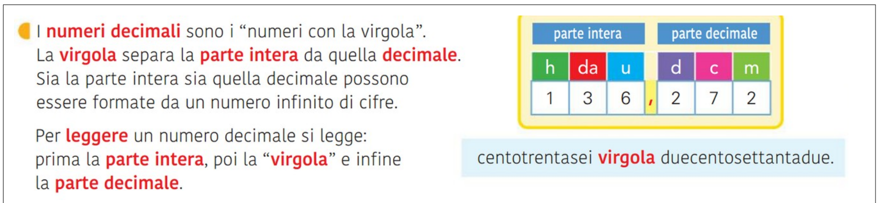
I NUMERI DECIMALI

I **numeri decimali**, cioè i numeri con la virgola, sono formati da una **parte intera** (unità, decine, centinaia…) e da una **parte decimale** (decimi, centesimi, millesimi) separate dalla **virgola**. Seguono il sistema decimale posizionale e si possono confrontare, ordinare, scomporre…

Figure 40: p.22 Senza Frontiere 5 Matematica (Tordella, A., et al., 2022)

Une traduction littérale de l'encadré de la Figure 40 serait : « Les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres avec la virgule, sont composés d'une partie entière[…] et d'une partie décimale[…] séparées par une virgule ». Une traduction adaptée à la tradition française serait davantage : « l'écriture décimale des nombres… »

Un autre manuel consulté qui est Traguardo discipline 5 Matematica (Costa, E., et al., 2020) est plus explicite :



I **numeri decimali** sono i "numeri con la virgola".
La **virgola** separa la **parte intera** da quella **decimale**.
Sia la parte intera sia quella decimale possono essere formate da un numero infinito di cifre.

Per **leggere** un numero decimale si legge: prima la **parte intera**, poi la "**virgola**" e infine la **parte decimale**.

parte intera				parte decimale		
h	da	u		d	c	m
1	3	6	,	2	7	2

centotrentasei **virgola** duecentosettantadue.

Figure 41: p.320 Traguardo discipline 5 Matematica (Costa, E., et al., 2020)

Nous pouvons lire ici : « I numeri decimali… Sia la parte intera sia quella decimale possono essere formate da un numero infinito di cifre. » ce qui peut être traduit de manière littérale par : « Les nombres décimaux… La partie entière et la partie décimale peuvent être composées d'un nombre infini de chiffres. ». D'un point de vue français, ici « nombre décimal » est utilisé comme « synonyme » de « écriture décimale ».

5.4 Allemagne

La documentation institutionnelle : quel savoir à enseigner sur les fractions en Allemagne ?

En Allemagne, l'éducation est organisée au niveau des « Länder » (régions) et les contenus peuvent varier d'une région à une autre. Les indications officielles de programmes auxquelles nous feront référence ici concernent la Bavière (Bayern), elles sont disponibles en ligne sur le site internet de l'institut d'état pour la qualité scolaire et la recherche éducative de Munich (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. München).

A l'âge du CM2 (Jahrgangsstufe 5), dans la documentation officielle considérée il n'y a pas d'attendus concernant les fractions. La documentation officielle d'autres régions précise parfois que les élèves sont amenés à considérer des fractions simples utilisées dans la vie quotidienne.

L'âge d'introduction des fractions commence en 6e (Jahrgangsstufe 6). D'après notre traduction de la documentation officielle, c'est à partir de leurs propres expériences que les élèves reconnaissent que les fractions sont bien adaptées à la description de situations de la vie quotidienne. Ils traitent des fractions sous leurs diverses formes et les utilisent également pour évaluer les expériences aléatoires (fréquence). En partant de différentes manières d'illustrer les fractions, les élèves se familiarisent avec les termes associés, les différentes écritures et ils s'appuient sur cela pour reconnaître les fractions en tant que nombre. Ils placent sur la droite numérique des fractions, et aussi des fractions négatives (les nombres relatifs sont étudiés en CM2). Ils écrivent des fractions égales (simplification et amplification). Ils utilisent les pourcentages comme une forme de notation alternative aux fractions. Puis ils interprètent les fractions en tant que quotient. Les nombres décimaux sont introduits avec les fractions décimales (même si cependant la notation à virgule était utilisée l'année précédente, mais uniquement en relation avec les tailles). Les quatre opérations sont travaillées avec les fractions, mais uniquement avec des fractions positives.

Le savoir apprêté dans les manuels allemands

Les manuels choisis concernent également la région de la Bavière (Bayern), en cohérence avec la documentation officielle consultée.

Formel plus 5 Mathematik (Deinlein, U., et al., 2017) est le manuel de CM2 choisi. Nous avons pu constater qu'il y avait très peu d'activités avec les fractions. Sur l'ensemble du manuel, on ne peut trouver que cinq exercices ou parties d'exercices qui y font référence. Ces activités font intervenir le sens « mesure » de la fraction ou le sens « opérateur », en utilisant les fractions 1/2, 1/4 et 3/4.

Le manuel choisi correspondant à l'âge de la 6e est Formel plus 6 Mathematik (Brucker, J., et al., 2018). Dans le premier chapitre sur les fractions, la fraction est définie après de petites activités faisant intervenir la notion de fraction « partie-tout ». Puis une écriture mixte des nombres rationnels est donnée (somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1), en utilisant une notation particulière où le symbole « + » peut être omis, tout en collant le nombre entier à la fraction. Ces écritures sont utilisées sans faire intervenir de division dans un premier temps :

Figure 42: p.10 Formel plus 6 Mathematik (Brucker, J., et al., 2018)

Après un exercice d'application avec des diagrammes, un exercice plus numérique est proposé accompagné d'un conseil (tipp) faisant intervenir le sens quotient :

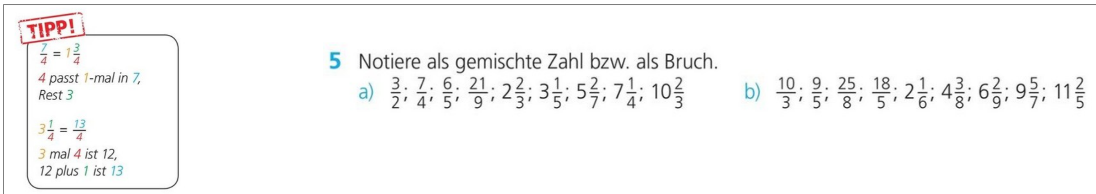


Figure 43: p.10 Formel plus 6 Mathematik (Brucker, J., et al., 2018)

Dans le petit encadré TIPP !, pour transformer $\frac{7}{4}$ en nombre mixte, il est indiqué que dans 7, il va 1 fois 4, il reste 3, mais le reste est ensuite partagé puisqu'on a $\frac{3}{4}$ (il ne s'agit pas d'une division euclidienne). Le sens « quotient » de la fraction est alors utilisé pour les transformations numériques. Dans la page suivante, la fraction d'une quantité est introduite en associant la partition à une division, l'interprétation « opérateur » de la fraction y est travaillée. La double page suivante est consacrée à la fraction « mesure ». Le manuel propose ensuite de comparer les fractions, d'abord en les plaçant sur la droite numérique, puis en utilisant des écritures de fractions équivalentes. Les fractions décimales sont alors introduites, suivent les nombres décimaux. À propos des nombres décimaux, on trouve ceci :

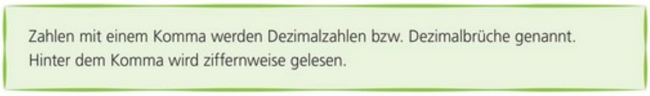


Figure 44: p.18 Formel plus 6 Mathematik (Brucker, J., et al., 2018)

Cet encadré indique que les nombres avec une virgule sont appelés nombres décimaux ou fractions décimales, ce qui est après la virgule se lit chiffre après chiffre.

Les élèves apprennent ensuite à convertir une fraction en nombre décimal en passant par les fractions décimales, pas par la division dans un premier temps. Le sens de la division ne sert pas à justifier la technique permettant de trouver l'écriture décimale d'un nombre donné par une de ses écritures fractionnaires, comme nous avons pu le voir en Italie. Il s'agit ici d'opérer un changement de dénominateur pour obtenir un dénominateur qui soit une puissance de 10, permettant alors de donner l'écriture décimale de la fraction. Les cas particuliers en bas à gauche dans la Figure 45 sont indiqués comme des transformations importantes qui semblent devoir être connues et retenues. La méthode donnée et les exercices d'application sont les suivants :

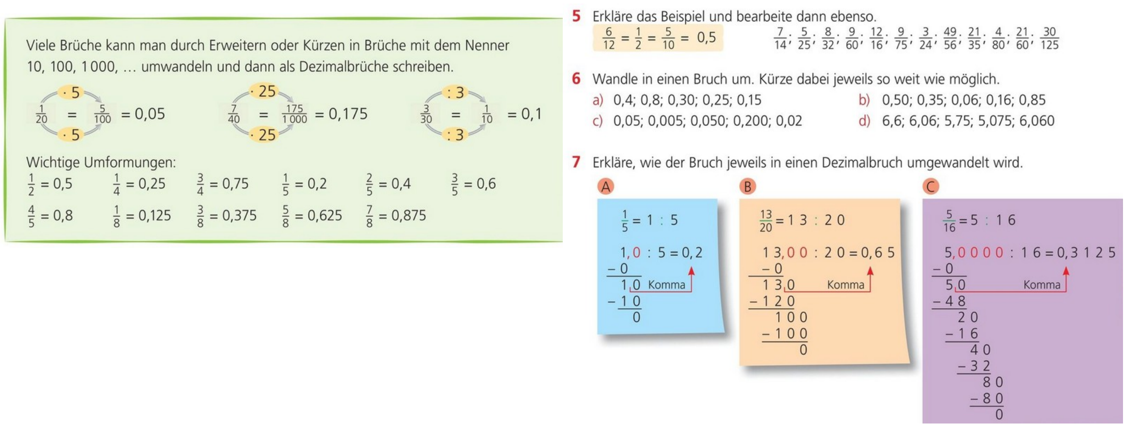
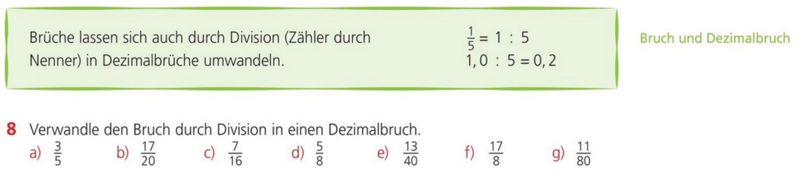


Figure 45: p.22-23 Formel plus 6 Mathematik (Brucker, J., et al., 2018)

Le dernier exercice d'application est en réalité une activité d'introduction au sens « quotient » de la fraction qui sera explicité juste ensuite. Dans cette activité, il est demandé à l'élève d'expliquer comment chaque fraction est convertie en fraction décimale (« Dezimalbruch »), l'élève découvre ainsi que les transformations précédentes peuvent aussi se faire à l'aide de la division. L'encadré suivant présente le sens « quotient » pris par la fraction ainsi que le premier exercice d'application :



Brüche lassen sich auch durch Division (Zähler durch Nenner) in Dezimalbrüche umwandeln. $\frac{1}{5} = 1 : 5$ $1,0 : 5 = 0,2$

Bruch und Dezimalbruch

8 Verwandle den Bruch durch Division in einen Dezimalbruch.
a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{17}{20}$ c) $\frac{7}{16}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{13}{40}$ f) $\frac{17}{8}$ g) $\frac{11}{80}$

Figure 46: p.23 Formel plus 6 Mathematik (Brucker, J., et al., 2018)

L'encadré vert indique que les fractions, en divisant (le numérateur par le dénominateur), peuvent être converties en fractions décimales. On peut noter ici que le nombre 0,2 que nous appelons en France un nombre décimal est en Allemagne appelé une fraction décimale.

Conclusion

En conclusion, en Allemagne, les élèves ont très peu manipulé les fractions à l'âge du CM2, et c'est en 6e qu'ils les découvrent véritablement. La fraction est définie de manière informelle, à travers un exemple numérique. Le sens quotient est clairement établi après avoir étudié les fractions décimales, ceci à travers un exemple numérique également. Nous n'avons pas trouvé une définition du quotient équivalente à celle que l'on trouve en France. Par ailleurs, nous avons remarqué que ce que nous appelons un nombre décimal en France, est appelé une fraction décimale en Allemagne, étant donné qu'en Allemagne, ce que l'on appelle un nombre décimal peut éventuellement avoir une infinité de chiffres après la virgule, tout comme en Italie. D'après les attendus officiels, les différentes interprétations des fractions sont abordées en 6e, cependant, dans le manuel considéré nous n'avons pas pu trouver la fraction « rapport », ce qui n'exclut pas que ce sens soit travaillé en classe cependant.

5.5 Angleterre

La documentation institutionnelle : quel savoir à enseigner sur les fractions en Angleterre ?

En Angleterre, le programme officiel des attendus en mathématique est disponible sur le site internet du gouvernement (Department for Education — UK Government. National curriculum in England : Mathematics programmes of study*)*.

L'âge d'introduction des fractions commence véritablement à l'âge du CP (year 2 key stage 1) où les élèves apprennent à reconnaître, trouver, nommer et écrire les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$ d'une longueur, d'une surface, d'un ensemble d'objets ou d'une quantité. Ils écrivent des fractions simples, par exemple $\frac{1}{2}$ de 6 = 3, et ils reconnaissent l'équivalence de $\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sur une droite graduée. Le document d'accompagnement indique que les élèves peuvent apprendre à relier les fractions aux nombres lorsque ceux-ci peuvent être calculés (en trouvant la fraction d'une longueur par exemple). 3/4 est la première fraction non unitaire qu'ils rencontrent. Les élèves apprennent à compter avec les fractions jusqu'à 10, ce qui renforce la conception des fractions en tant que nombre, éventuellement supérieur à 1. Par exemple :

$1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2, etc.

À l'âge du CM1 (year 5 key stage 2), le programme autour des fractions est très fourni, mais le sens quotient n'y est pas explicite. Les élèves comparent des fractions lorsque les dénominateurs sont des multiples les uns des autres, ils savent écrire des fractions égales, etc. Le travail sur les nombres mixtes (somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1) se fait sans diviser de manière explicite. De même, ils savent écrire un nombre décimal sous forme de fraction décimale sans passer par la division (donc sans passer par une écriture décimale), et inversement. Par contre, d'après les documents officiels, c'est au niveau du travail de la division que le lien avec les fractions est mis en évidence : les élèves interprètent le résultat non entier de la division en exprimant le résultat de différentes manières suivant le contexte, en utilisant le reste, la fraction, la valeur décimale, ou en donnant un arrondi.

C'est à l'âge du CM2 (year 6 key stage 2) que l'interprétation de la fraction comme quotient apparaît dans les documents officiels : associer la fraction à la division et donner une fraction simple équivalente à la fraction décimale (par exemple 0,375 associée à la fraction $\frac{3}{8}$). Dans les documents officiels, les attendus sont moins détaillés pour le niveau correspondant à la 6e, en effet le document regroupe en même temps 6e, 5e et 4e (Key stage 3). Cependant, il est précisé que les élèves doivent pouvoir travailler de manière interchangeable avec des décimaux et les fractions qui leur correspondent (exemple : 3,5 et $\frac{7}{2}$ ou 0,375 et $\frac{3}{8}$). De plus, les pourcentages doivent pouvoir être interprétés comme des fractions ou des nombres décimaux. Enfin, il est stipulé que les fractions et les pourcentages sont à interpréter comme des opérateurs.

Le savoir apprêté dans les manuels anglais

Le manuel consulté pour l'équivalent du CM1 est : KS2 Maths Year 5 (CGP Authors, 2020). Après une première partie sur la numération, le manuel se propose d'étudier les différentes opérations. Dans la partie sur la division, on y exprime le reste de la division en utilisant des fractions (ceci avant d'avoir traité le chapitre sur les fractions, les élèves ayant déjà travaillé avec les fractions l'année précédente) :

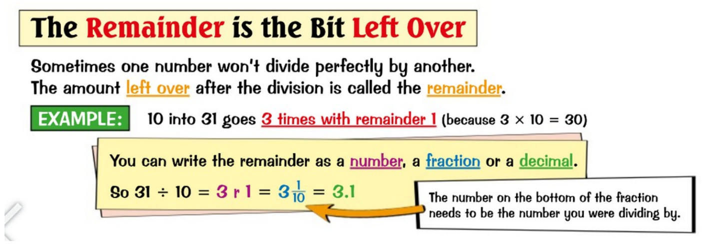


Figure 47: p.22 KS2 Maths Year 5 (CGP Authors, 2020)

Cette partie explique que lorsque un nombre ne se divise pas parfaitement par un autre, alors la partie qui ne peut être divisée est le reste. Ils écrivent (en violet) : $31 \div 10 = 3 \text{ r } 1$ par convention d'écriture (alors qu'ils notent la division euclidienne tout à fait comme en France plus tard dans leur scolarité), où le reste est exprimé par un nombre entier. Le reste peut aussi être exprimé par une fraction. Le résultat de cette division exacte est également proposé avec une écriture décimale à virgule. Dans le cas où il est exprimé par une fraction, le nombre du dessous doit être le nombre par lequel on divise : « the number on the bottom of the fraction needs to be the number you were dividing by ».

Le chapitre sur les fractions ne présente pas de définition de la fraction, et s'ouvre sur les fractions décimales, viennent ensuite les fractions égales, les comparaisons de fractions, puis les opérations avec les fractions (addition et soustraction de fractions avec le même dénominateur, avec des dénominateurs différents, fraction d'une quantité, pourcentages). Au moment de l'addition et de la soustraction de fractions, les fractions impropres et les nombres mixtes sont introduits, et le sens « quotient » de la fraction transparaît, sans être toutefois explicite :

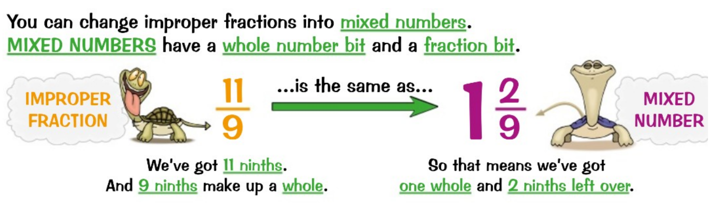


Figure 48: p.29 KS2 Maths Year 5 (CGP Authors, 2020)

L'encadré indique que les fractions impropres (supérieures à 1) peuvent être changées en nombres mixtes, les nombres mixtes étant composés d'un morceau entier et d'un morceau fraction (« mixed numbers have a whole number bit and a fraction bit »).

Dans ce manuel, les interprétations de la fraction présentes sont la fraction « partie-tout », la fraction « opérateur » et la fraction « mesure » ; le sens « quotient » est également présent, mais pas de manière très explicite. Nous n'y avons pas trouvé la fraction « rapport ».

Le manuel consulté pour l'équivalent du CM2 est : KS2 Maths Year 6 (CGP Authors, 2020)

Dans la partie sur la division, on trouve (comme dans le manuel de l'année précédente) :

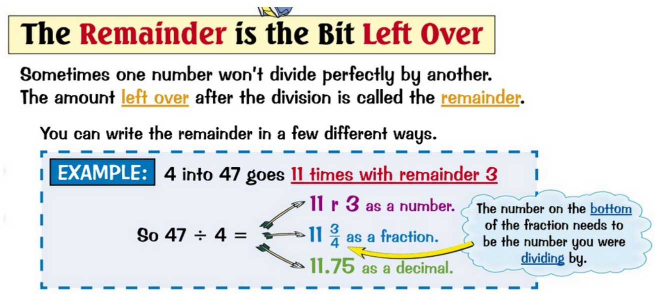


Figure 49: p.20 KS2 Maths Year 6 (CGP Authors, 2020)

Dans le chapitre sur les fractions, le symbole de la barre de fraction est clairement associé au symbole de la division, afin de convertir des fractions en nombres décimaux :

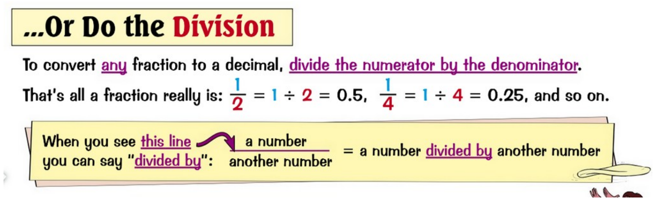


Figure 50: p.47 KS2 Maths Year 6 (CGP Authors, 2020)

Un premier exercice d'application où l'élève est amené à effectuer la division pour transformer une fraction en un nombre décimal se présente ainsi :

Convert these fractions to decimals:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{7}{8}$

Figure 51: p.47 KS2 Maths Year 6 (CGP Authors, 2020)

En CM2, toutes les opérations concernant les fractions sont étudiées, sauf la division de fractions. En effet, on divise une fraction par un nombre entier seulement, la division de fractions n'est abordée qu'en 5e. À travers les différentes parties du manuel, on remarque que toutes les interprétations de la fraction ont été abordées à la fin de l'équivalent du CM2.

Le manuel consulté pour l'équivalent de la 6e est : KS3 Maths Year 7 (CGP Authors, 2021). Le manuel présente cinq sections et la partie sur les fractions se trouve dans la section « unités et proportionnalité ». Cette section n'insiste pas sur l'interprétation de la fraction comme un quotient, mais l'accent est mis sur l'aspect technique du calcul. On remarque ceci dans la partie « fraction, décimaux et pourcentage » :

Converting Fractions to Decimals — Dividing

Any **fraction** can be written as a **decimal**. You can do this by dividing the **numerator** by the **denominator**, either using a calculator or short division.

Figure 52: p.86 KS3 Maths Year 7 (CGP Authors, 2021)

Cet encadré indique que toute fraction peut s'écrire sous forme décimale (« Any fraction can be written as a decimal »). Dans cet extrait, « decimal » dans le contexte anglais correspond à « écriture décimale » dans le contexte français.

Conclusion

Le sens « quotient » de la fraction est préparé en CM1, mais ce sens n'est alors pas complètement explicité. C'est en CM2 que cette interprétation de la fraction est travaillée pour convertir des fractions en nombres décimaux, et c'est aussi en fin de CM2 que toutes les différentes interprétations des fractions ont été abordées. Dans les différents manuels présentés, nous n'avons pas pu trouver une définition du sens quotient de la fraction équivalente à celle que nous connaissons en France.

5.6 Synthèse

Dans nos recherches au niveau de la définition du sens « quotient » pris par la fraction chez nos voisins européens, nous n'avons pas trouvé l'équivalent de la définition française dans les manuels présentés, à savoir :« Le quotient de a par b ($b \neq 0$) est le nombre qui, multiplié par b donne a, on le note $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$ ». Bien entendu, ceci ne veut pas dire qu'il est impossible de la trouver, pour cela il faudrait prolonger les investigations ; cependant il semble qu'il s'agisse bien d'un choix de transposition délibéré.

Nous pensons que les différences de transposition observées du sens « quotient » pourraient être liées à notre définition française des nombres décimaux : un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, par conséquent, c'est un nombre dont l'écriture décimale est finie, ce qui n'est pas le cas chez nos voisins. En effet, ce que nos voisins européens désignent par nombre décimal est pour nous une écriture décimale. En Allemagne par exemple, un nombre décimal français comme 0,2 est appelé une fraction décimale. Au niveau pédagogique, les ensembles caractéristiques de nombres retenus diffèrent, l'ensemble des nombres décimaux n'apparaissant pas chez nos voisins européens, alors qu'en France il est présent :

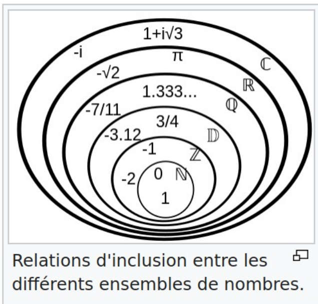


Figure 54: Wikipédia français

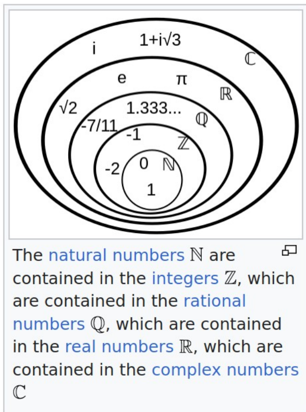


Figure 53: Wikipédia anglais

Par ailleurs, nos voisins utilisent l'équivalent de notre vocabulaire pour désigner le quotient dans la division euclidienne ou dans la division exacte, et les techniques pour vérifier une division sont similaires à celles que l'on connaît en France. Néanmoins, les différents choix de transposition cités plus haut sont de nature à avoir un impact sur l'importance des difficultés rencontrées par les enseignants et les élèves à donner du sens au sens « quotient » de la fraction.

Dans le tableau suivant, nous avons voulu regrouper les informations recueillies dans cette partie, en lien avec nos questions de recherche :

Pays	À quel moment le symbole de la barre de fraction est-il associé au symbole de la division ?	À quel moment l'interprétation du sens quotient de la fraction est-elle abordée ?	À quel moment dans la progression ?	De quelle manière ?	À quel moment toutes les interprétations de la fraction ont-elles été abordées ?
Danemark	CM1	CM1	Dans le chapitre sur la division	De manière intuitive d'abord, puis avec l'utilisation des nombres mixtes	Toutes sont abordées à l'âge du CM1
Espagne	CM2	CM2	Dans le chapitre sur la comparaison de fractions	Dans un premier temps sans impliquer de division numérique, puis pour calculer des fractions égales à un nombre entier	Toutes sont abordées à l'âge du CM2
Italie	CM1	CM2	Dans le chapitre sur les fractions.	Dans la comparaison de fractions et pour utiliser des pourcentages	Toutes sont abordées à l'âge du CM2
Allemagne	6e	6e	Dans le chapitre sur les fractions	De manière informelle avec les nombres mixtes et de manière plus formelle pour convertir des fractions en fractions décimales puis en nombres décimaux	Toutes sont abordées à l'âge de la 6e (le sens rapport étant absent du manuel consulté mais prescrit par les indications officielles)
Angleterre	CM2	CM2	Dans le chapitre sur les fractions	De manière informelle avec des exemples numériques, pour convertir des fractions en nombres décimaux	CM2
France	6e	6e	Dans le chapitre sur les fractions	De manière plus formelle, avec la définition française du sens « quotient » de la fraction	6e

Tableau 3: Tableau de synthèse des différentes interprétations de la fraction suivant les pays considérés

6 LE SAVOIR ENSEIGNÉ DANS LES CLASSES

6.1 Élaboration d'un questionnaire

Après avoir examiné les programmes officiels ainsi que plusieurs manuels français et étrangers, il nous a semblé opportun d'approfondir le sujet pour essayer de caractériser le savoir effectivement enseigné dans les classes autour de la définition du sens « quotient » pris par la fraction. Un questionnaire à l'attention des enseignants de mathématiques exerçant au collège a été élaboré dans cette perspective. Ce questionnaire comporte trois parties. La première partie vise à situer le contexte dans lequel l'enseignant interrogé travaille ; dans la seconde partie, nous avons cherché à recueillir des faits concernant la pratique de l'enseignant dans l'apprentissage du sens « quotient » de la fraction avec ses classes ; la troisième partie a pour objectif de recueillir les opinions des enseignants quant à ce savoir à transmettre aux élèves. Pour élaborer ce questionnaire, nous nous sommes appuyées sur les analyses des programmes et manuels français ainsi que sur l'analyse épistémique présentée dans le chapitre 3. Nous avons réalisé une analyse a priori des réponses possibles des enseignants que nous confrontons ensuite aux réponses obtenues.

EXTRAIT DU QUESTIONNAIRE

Contexte

1. Depuis combien de temps enseignez-vous ? [*Nombre à écrire*]

2. Votre établissement d'exercice est-il public ou privé ? [Public / Privé]

3. Votre établissement d'exercice se situe-t-il en zone rurale, péri-urbaine ou urbaine ? [Rurale / Péri-urbaine / Urbaine]

4. Avez-vous régulièrement en charge des classes de 6e ? [Oui / Non / Parfois]

5. Avez-vous cette année la charge d'une ou plusieurs classes de 6e ? [Oui, une. / Oui, plusieurs / Non]

6. Quel manuel utilisez-vous en 6e ? [*Texte libre*]

7. Utilisez-vous d'autres ressources, d'autres manuels ou fiches pour compléter ? Si oui, pouvez-vous indiquer dans les commentaires lesquelles principalement ?
[Oui / Non — *Texte libre*]

8. Utilisez-vous les repères de progression du ministère ? [Oui / Pas toujours / Un peu / Non]

Dans la partie déterminant le contexte d'exercice, la première question posée est celle de l'expérience de l'enseignant : « Depuis combien de temps enseignez-vous ? ». Nous pensons qu'un enseignant avec peu d'expérience professionnelle aura tendance à respecter scrupuleusement les recommandations officielles et à prendre davantage appui sur le manuel qu'il utilise alors qu'un enseignant plus expérimenté pourra mettre en perspective sa pratique et faire des choix en conséquence, voire s'affranchir de certaines recommandations. L'expérience peut également avoir permis à l'enseignant de construire avec le temps un catalogue plus varié de ressources autres que le manuel utilisé. À ce sujet, nous avons montré partie 4 que ne serait-ce que dans le contenu des manuels, il existe une diversité des définitions et des praxéologies. La deuxième question s'intéresse au type d'établissement (public/privé) ; nous pensons qu'il est possible que les enseignants d'établissements privés aient une interprétation plus personnelle des textes de programme que dans les établissements publics. Dans la troisième question : « Votre établissement d'exercice se situe-t-il en zone rurale, péri-urbaine ou urbaine ? », il s'agit de situer l'établissement géographiquement. Nous pensons qu'un contexte géographique plus isolé n'a que peu d'influence sur les choix des enseignants ; nous souhaitons pouvoir le vérifier. Les deux questions suivantes interrogent la proximité des enseignants avec le niveau 6e. Ici nous présumons que la majorité des enseignants de collège prennent régulièrement en charge des classes de 6e, ceci lié aux contraintes horaires des services d'enseignement et aux répartitions. Lorsque nous posons la question du manuel choisi, nous supposons que tous les établissements ont un manuel à disposition. En interrogeant les autres ressources utilisées par les enseignants, nous projetons que les ressources gratuites en ligne qui permettent de créer des fiches d'exercices en faisant une sélection personnelle sont plébiscitées (Sésamath, Iparcours, Irem), puisqu'elles permettent de compléter avantageusement le savoir apprêté dans les manuels. À la question 8 : « Utilisez-vous les repères de progression du ministère ? », nous nous attendons à ce que les enseignants répondent « Oui » en grande majorité, et à ce que seuls quelques-uns répondent « Pas toujours ». Toutefois nous prenons parti de donner la possibilité de choisir les réponses « Un peu » et « Non » pour compléter les alternatives proposées, même si nous faisons l'hypothèse que le savoir à enseigner est bien identifié par les enseignants dans les textes de programme.

La suite du questionnaire cible les détails des pratiques des enseignants qui nous permettront d'apporter des éléments de réponse à notre troisième question de recherche (QR3) : Comment ensuite les enseignants s'emparent-ils du savoir à enseigner et du savoir apprêté pour construire leur projet de cours ?

EXTRAIT DU QUESTIONNAIRE

Sens « quotient » pris par la fraction

9. Mettez-vous en œuvre des activités d'introduction au sens quotient pris par la fraction, et/ou des activités d'introduction à la définition de l'écriture fractionnaire d'un quotient ? [Oui / Non]

{ Si « Non » ou « sans réponse » aller à 11}

10. Lesquelles ? Dans le manuel ou fiche particulière ? Pouvez-vous donner des précisions ? [*Texte libre*]

11. Quelle définition de l'écriture fractionnaire d'un quotient donnez-vous en 6e ?

[$\frac{a}{b} = a \div b$ / $\frac{a}{b} = a \div b$ tel que $\frac{a}{b} \times b = a$ / Autre chose. Vous est-il possible de préciser ci-dessous ? — *Texte libre*]

12. Écrivez-vous cette définition avec des lettres, des symboles ou à travers un exemple numérique ? (Plusieurs réponses sont possibles). [Lettres / Symboles / Exemples numériques]

13. Pouvez-vous expliquer ce choix de définition ? (Si oui, indiquez dans les commentaires : prescriptions, manuel, etc.) [Oui / Non – *Texte libre*]

14. Rencontrez-vous des difficultés particulières pour faire découvrir cette définition aux élèves ? [Oui / Non / Parfois] {Si « Non » aller à 16 / Sinon continuer}

15. Lesquelles ? [*Texte libre*]

16. Trouvez-vous que les élèves ont des difficultés à **comprendre** cette définition ? [Oui / Non / Parfois / Sans réponse] {Si « Non » aller à 18 / Sinon continuer}

17. Pourquoi à votre avis ? [*Texte libre*]

18. Les élèves ont-ils, selon vous, des difficultés à **utiliser** cette définition pour résoudre des exercices ou des problèmes plus complexes ? [Oui / Non / Parfois / Sans réponse] {Si « Non » aller à 21 / Sinon continuer}

19. Pourquoi ? Pouvez-vous décrire ces difficultés ? [*Texte libre*]

20. Quel est dans cette situation votre choix d'exercices ? [*Texte libre*]

Dans un premier temps les questions 9 et 10 ont pour but de mettre en lumière la manière dont les enseignants choisissent d'introduire cet objet de savoir (le sens « quotient » pris par la fraction). Nous supposons que tout enseignant choisit une activité d'introduction afin de favoriser la démarche d'enquête préconisée autour du savoir à apprendre, mais nous souhaitons savoir s'ils prennent davantage appui sur le manuel ou sur d'autres supports. Nous projetons que ce choix dépendra essentiellement du manuel qu'ils utilisent, le contenu des activités proposées étant inégal suivant les éditeurs mais aussi suivant les dates d'édition, la place réservée à l'élève pareillement (voir notre analyse praxéologique du chapitre 4). Nous posons ensuite la question quant à la définition que les enseignants choisissent d'écrire lors de l'institutionnalisation du savoir à apprendre (question 11) : choisissent-ils d'écrire simplement « $\frac{a}{b} = a \div b$ » ou bien suivent-ils les directives en écrivant « $\frac{a}{b} = a \div b$ tel que $\frac{a}{b} \times b = a$ » ? Alors que nous ne voyons pas d'autre alternative à ces deux dernières propositions d'après notre analyse des documents institutionnels (chapitre 4), nous laisserons cependant la possibilité de faire un autre choix avec « Autre chose », tout en sollicitant des précisions à ce sujet. La question 12 examine la formulation de la définition choisie : avec des lettres, des symboles, des exemples numériques. Nous escomptons alors que la formulation la plus courante sera celle avec des lettres, illustrée ensuite d'exemples numériques. Parmi les enseignants utilisant le manuel Transmath, il se peut que certains retiennent la formulation avec des symboles, illustrée d'exemples numériques, puisque c'est la formulation présentée dans ce manuel (voir notre analyse p.24). Par ailleurs nous ne pressentons pas de formulation uniquement à travers des exemples numériques, du fait de la nécessité de décontextualiser le savoir à apprendre. La question 13 cherche à préciser les motivations des enseignants dans le choix effectué au niveau de la définition institutionnalisée, en particulier dans le cas où celle retenue serait « $\frac{a}{b} = a \div b$ ». Nous conjecturons que ce choix a pu être fait suite à des difficultés répétées et confirmées par la recherche (évoquées au chapitre 1) pour faire découvrir la définition prescrite aux élèves (questions 14 et 15). Les questions 16 à 20 tentent d'explorer les difficultés des élèves relevées par les enseignants, que ce soit au niveau de la compréhension ou de l'utilisation de la définition, quelle que soit celle qui a été institutionnalisée. Il est possible que l'introduction des lettres dans la formule fasse obstacle à la compréhension pour les élèves ; mais l'utilisation des symboles plutôt que des lettres ne nous semble pas garantir une plus grande facilité de mise en œuvre. Il se peut que les difficultés constatées dans l'institutionnalisation de la définition prescrite soient liées au fait que c'est une définition en deux parties que les élèves auraient ensuite du mal à articuler. Cette définition peut leur sembler artificielle, ce qui serait accentué par les termes « tel que » auxquels les élèves sont peu habitués en 6e.

Lors du recueil d'opinions en fin de questionnaire, les questions sont différentiées en fonction de la définition choisie par l'enseignant.

EXTRAIT DU QUESTIONNAIRE

Recueil d'opinions

- {*Si réponse 11 = «* $\frac{a}{b} = a \div b$ *tel que* $\frac{a}{b} \times b = a$ *», alors*}

21. Que pensez-vous personnellement de cette définition ? [*Texte libre*]

22. Auriez-vous préféré proposer une autre définition aux élèves ? [Oui / Non / Sans réponse]

{Si « Non » ou « sans réponse » aller à 26}

23. Laquelle ? Comment l'auriez-vous mise en œuvre ? [*Texte libre*] {Aller à 26}

- [*Si réponse 11 = «* $\frac{a}{b} = a \div b$ *» ou si réponse 11 = « Autre chose », alors*]

24. Avez-vous auparavant choisi ou essayé une autre définition ? [Oui / Non / Sans réponse]

{ Si « Non » ou « sans réponse » aller à 26}

25. Laquelle ? Pourquoi avoir changé ? [*Texte libre*]

26. Que pensez-vous personnellement de cette partie du programme ? [*Texte libre*]

Dans le cas où le choix fait est « $\frac{a}{b} = a \div b$ *tel que* $\frac{a}{b} \times b = a$ », nous avons voulu sonder si c'était un choix contraint ou bien si c'était un choix d'adhésion de la part des enseignants (question 21). Nous projetons que certains d'entre eux auraient sans doute préféré donner une définition moins correcte mais plus simple pour les élèves (questions 22 et 23), aussi nous leur demandons de s'exprimer à ce sujet. Dans le cas où le choix de définition est « $\frac{a}{b} = a \div b$ », la question 24 interroge les enseignants pour savoir s'ils avaient par le passé essayé d'utiliser une autre définition. Dans cette éventualité, la question 25 permet de préciser s'il s'agit bien de la définition prescrite, et les enseignants peuvent ensuite expliquer les raisons qui les ont poussés à changer leur projet de cours. Nous pensons qu'ils exercent probablement dans des conditions où une adaptation a été nécessaire en corrélation avec le profil de leurs élèves, et que cette partie du programme peut revêtir des difficultés insurmontables selon eux dans les circonstances qu'ils observent. C'est ce que permettra d'apprécier leur réponse quant à leur avis personnel sur cette partie du programme de mathématiques dans la dernière question du questionnaire (question 26).

Pour pouvoir proposer ce questionnaire aux enseignants, le logiciel d'enquête statistique LimeSurvey a été utilisé. Il permet d'éditer le questionnaire en ligne, après une rapide introduction précisant aux enseignants que l'anonymat des réponses est complètement garanti. Le logiciel dispose d'outils d'analyse permettant d'exploiter le questionnaire par la suite. Environ 120 enseignants ont été sollicités par le biais du mail académique de leurs établissements, et nous avons reçu 30 réponses au total, 29 réponses complètes et 1 réponse incomplète que nous avons conservée puisque certains éléments étaient présents, comme le choix du manuel par exemple. Nous avons alors procédé à une analyse a posteriori des éléments recueillis.

6.2 Analyse des réponses au questionnaire

Contexte

Les enseignants ayant répondu au questionnaire ont en moyenne environ 17 ans d'expérience professionnelle, les valeurs s'étalent entre un an d'expérience et 30 ans d'expérience, et la médiane des années d'exercice est de 18 ans. La plupart des réponses enregistrées proviennent d'enseignants exerçant dans un établissement relevant du secteur public (seulement 3 réponses d'établissements privés), alors que les établissements publics et privés avaient été sollicités à parts égales. Nous pensons que ceci est dû au fait que nous avons choisi de communiquer via le mail académique, et que ceci n'est pas le mode de communication privilégié de ces établissements ; il est possible en effet de trouver une autre adresse mail sur leurs pages internet que nous aurions sans doute dû choisir pour envoyer nos demandes. Les réponses obtenues proviennent majoritairement de zones péri-urbaines (43,33 %), et rurales (33,33 %), les zones urbaines étant moins représentées (23,33 %). Nous avons remarqué que le type de zone d'exercice n'a pas d'influence sur les réponses données au questionnaire. La grande majorité des répondants ont régulièrement ou parfois en charge des classes de 6e (87 %), mais 30 % d'entre eux n'ont pas de classe de 6e cette année. Les manuels les plus utilisés par les enseignants sont en premier lieu Transmath (8 réponses) et Myriade (6 réponses), certains enseignants faisant le choix de ne pas utiliser de manuel (7 réponses). Puisque les manuels les plus utilisés sont aussi ceux que nous avons choisi d'analyser dans notre étude de manuels français, il nous sera alors possible de croiser nos informations et d'approfondir sur l'usage que font les enseignants des manuels. En particulier nous pourrons voir si leurs choix d'activité d'introduction et de définition coïncide avec celles des manuels et sonder à quel degré les enseignants s'emparent du savoir apprêté dans ces manuels. 90 % des enseignants utilisent d'autres ressources (en plus du manuel) pour compléter leurs cours : ils utilisent les fichiers Sésamath ou iParcours, les fichiers de l'Irem, divers sites internet dont « Maths en ligne », des fichiers échangés entre enseignants sur une page « Facebook » dédiée (« coin boulot des profs de maths »), des cahiers d'activités ou de compétences, ou encore d'autres manuels. Les plus citées à cet égard sont les fiches Irem et Sésamath. À notre surprise, les enseignants utilisent diversement les repères de progression du ministère :

8. Utilisez-vous les repères de progression du ministère ?

Réponse	Décompte	Pourcentage
Oui (A1)	11	36.67%
Pas toujours (A2)	7	23.33%
Un peu (A3)	8	26.67%
Non (A4)	4	13.33%
Sans réponse	0	0.00%

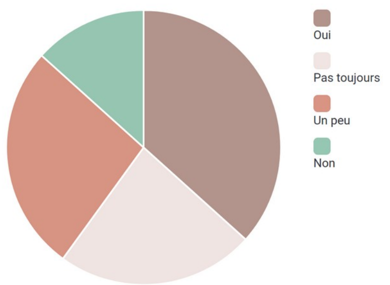


Figure 55: Utilisation des repères de progression

En croisant les réponses à cette question avec la définition donnée et la présence d'activités de découverte, nous constatons que les enseignants qui disent ne pas utiliser les repères de progression (au nombre de 4) sont aussi ceux qui n'utilisent pas d'activité de découverte du sens « quotient », de plus, ils choisissent d’institutionnaliser une autre définition que la définition prescrite dans les documents officiels analysés plus haut. Parmi les enseignants qui disent utiliser « un peu » les repères de progression (8 réponses), la plupart d’entre eux (au nombre de 5) n’utilisent pas d’activité de découverte, mais par contre ils sont plus nombreux à institutionnaliser la définition prescrite (6 réponses). Parmi les enseignants disant ne pas toujours utiliser les repères de progression (7 réponses), 4 proposent une activité de découverte aux élèves et 4 utilisent la définition prescrite. Les enseignants indiquant utiliser les repères de progression (11 réponses) sont plus nombreux à proposer une activité d’introduction (10 réponses), pourtant ils ne sont que 7 à utiliser la définition des documents officiels. Il semble donc que le choix de la définition ne soit pas directement corrélé avec l’utilisation des repères de progression, puisque ceux qui estiment les suivre davantage ne les appliquent pas systématiquement. Par contre, les enseignants les plus enclins à utiliser une activité d’introduction sont ceux qui estiment suivre les repères de progression. En conséquences, nous pensons que le choix de définition fait par les enseignants est délibéré, ce serait un choix de transposition didactique de leur part, et qu’il pourrait s’expliquer par les difficultés rencontrées dans leurs pratiques et dans la mise en œuvre effective du savoir à transmettre. La suite de notre analyse du questionnaire sera de nature à nous éclairer davantage à ce sujet.

Recueil de faits

La suite du questionnaire a pour objectif de documenter la diversité des pratiques au moment de l’introduction du sens « quotient » pris par la fraction. Il se révèle que 40 % des enseignants n’utilisent pas d’activité d’introduction au sens « quotient ». Pourtant, ces enseignants utilisent tous un manuel où le savoir apprêté propose une telle activité de découverte, et de plus ils disent utiliser d’autres ressources supplémentaires pour compléter les manuels. Il s’agit donc d’un choix délibéré de leur part, qui ne serait pas motivé par une difficulté d’accès à des ressources qui pourraient leur convenir dans cette situation. Parmi ceux qui utilisent une activité d’introduction, trois enseignants seulement utilisent l’activité d’introduction proposée dans le manuel (1 avec Myriade et 2 avec Transmath), les autres enseignants se tournent vers d’autres ressources comme celles qu’ils ont précédemment cité plus haut, utilisant la droite graduée, le pliage de bandes, la division euclidienne et la division décimale. L’activité de découverte n’est donc pas toujours perçue par les enseignants comme une clef pour que les élèves puissent s’approprier un savoir. Il se peut bien entendu que cela soit motivé par les contraintes du temps didactique. Nous constatons néanmoins que peu d'enseignants s'appuient sur l'activité de découverte proposée dans leur manuel.

Interrogés ensuite sur la définition qu'ils choisissent de donner aux élèves, nos résultats sont les suivants (A1 indique le choix $\frac{a}{b} = a \div b$ et A2 indique le choix $\frac{a}{b} = a \div b$ *tel que* $\frac{a}{b} \times b = a$) :

11. Quelle définition de l'écriture fractionnaire d'un quotient donnez-vous en 6ème ?

Réponse	Décompte	Pourcentage
(A1)	10	33.33%
(A2)	17	56.67%
Autre chose. Vous est-il possible de préciser ci-dessous ? (A3)	2	6.67%

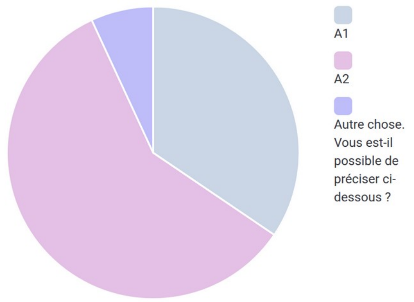


Figure 56: Définition choisie

Nous pouvons constater qu'un tiers des enseignants choisissent d'écrire $\frac{a}{b} = a \div b$ lors de l'institutionnalisation des savoirs, sans utiliser la définition prescrite. Nous remarquons que c'est exactement la définition que nous avons pu trouver dans tous les manuels étrangers que nous avons étudiés précédemment. Parmi les enseignants utilisant cette définition, deux disent évoquer la définition correcte avec les élèves, mais ne l'écrivent pas. Les enseignants indiquant adopter une autre définition que ce qui est proposé, utilisent en réalité des variantes de ces deux propositions (une de chaque), mais formulées avec des phrases plutôt qu'avec des égalités. La définition est alors écrite avec des lettres, et/ou des symboles, et/ou assortie d'exemples numériques :

12. Ecrivez-vous cette définition avec des lettres, des symboles ou à travers un exemple numérique ? (Plusieurs réponses sont possibles).

Réponse	Décompte	Pourcentage
Lettres (SQ001)	20	66.67%
Symboles (SQ002)	6	20.00%
Exemples numériques (SQ003)	23	76.67%

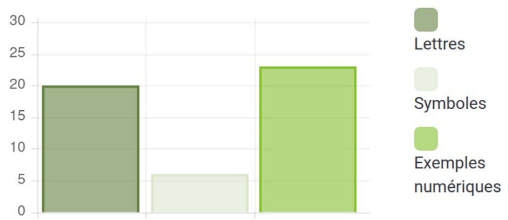


Figure 57: Choix pour l'écriture de la définition

Curieusement, ceux qui écrivent la définition avec des symboles ne sont pas ceux qui utilisent le manuel Transmath, manuel où la définition est présentée de la sorte comme nous avons pu le voir dans notre analyse de manuels. Certes, ceci questionne de nouveau le rapport au manuel des enseignants, mais il se peut aussi ce soit stratégique : en construisant son projet de cours, l'enseignant consulte de multiples ressources extérieures au manuel, et la formulation finale retenue peut avantageusement se différentier de celle du manuel pour permettre à l’élève de pouvoir bénéficier d’un autre éclairage que celui mis en avant par l’enseignant. Certains enseignants écrivent la définition des deux manières (lettres et symboles) avec à la suite des exemples numériques :

12. Ecrivez-vous cette définition avec des lettres, des symboles ou à travers un exemple numérique ? (Plusieurs réponses sont possibles).

Réponse	Décompte	Pourcentage
Lettres (SQ001)	20	100.00%
Symboles (SQ002)	4	20.00%
Exemples numériques (SQ003)	15	75.00%

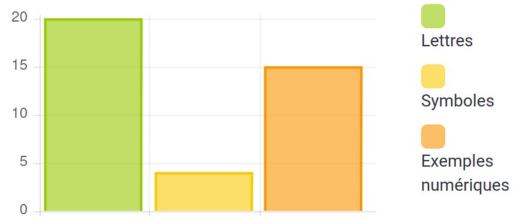


Figure 58: Choix pour compléter l’écriture de la définition lorsqu’elle est écrite avec des lettres

D’autres (mais peu) n’utilisent que des exemples numériques lors de l’institutionnalisation :

12. Ecrivez-vous cette définition avec des lettres, des symboles ou à travers un exemple numérique ? (Plusieurs réponses sont possibles).

Réponse	Décompte	Pourcentage
Lettres (SQ001)	15	65.22%
Symboles (SQ002)	4	17.39%
Exemples numériques (SQ003)	23	100.00%

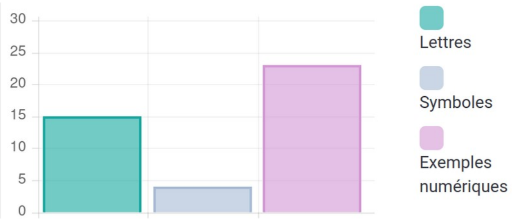


Figure 59: Utilisation d’exemples numériques pour écrire la définition

Dans la suite de notre analyse, nous allons différencier nos résultats suivant les deux types de définitions choisies.

Lorsque la définition choisie est $\frac{a}{b} = a \div b$

Ceci concerne le tiers des répondants, donc 10 réponses. Le choix de l’écrire avec des lettres, des symboles ou/et des exemples numériques est réparti de la sorte :

12. Ecrivez-vous cette définition avec des lettres, des symboles ou à travers un exemple numérique ? (Plusieurs réponses sont possibles).

Réponse	Décompte	Pourcentage
Lettres (SQ001)	4	40.00%
Symboles (SQ002)	1	10.00%
Exemples numériques (SQ003)	8	80.00%

Figure 60: Choix pour l’écriture de la définition $\frac{a}{b} = a \div b$

Par conséquent, on en déduit que certains choisissent d’écrire cette définition uniquement à travers des exemples numériques. Certains enseignants expliquent que ce choix de définition est motivé par le fait que la notion de formule est très difficile pour les élèves de 6e, et que cette version plus simple qu’ils écrivent n’est déjà pas comprise par le plus grand nombre des élèves. Un enseignant interrogé indique que l’équipe de mathématiques de son établissement a fait le choix de ne pas utiliser de définition avec des lettres en 6e, et que de concert ils l'abordent à partir de la 5e en donnant la définition correcte du sens « quotient » pris par la fraction à ce moment-là. D'après l'analyse des manuels que nous avons faite dans la partie 4, les lettres ne sont pas utilisées dans les écritures fractionnaires en CM2, ni pour généraliser d'autres notions. D'ailleurs, les repères de progression ne préconisent pas leur utilisation à ce niveau de progression, il est donc naturel que pour les élèves de 6e le statut de la lettre soit mal défini et d'un abord difficile de par sa nouveauté. Lorsque la définition choisie est $\frac{a}{b} = a \div b$, même si celle-ci semble plus simple que celle préconisée, on peut remarquer malgré tout des difficultés persistantes :

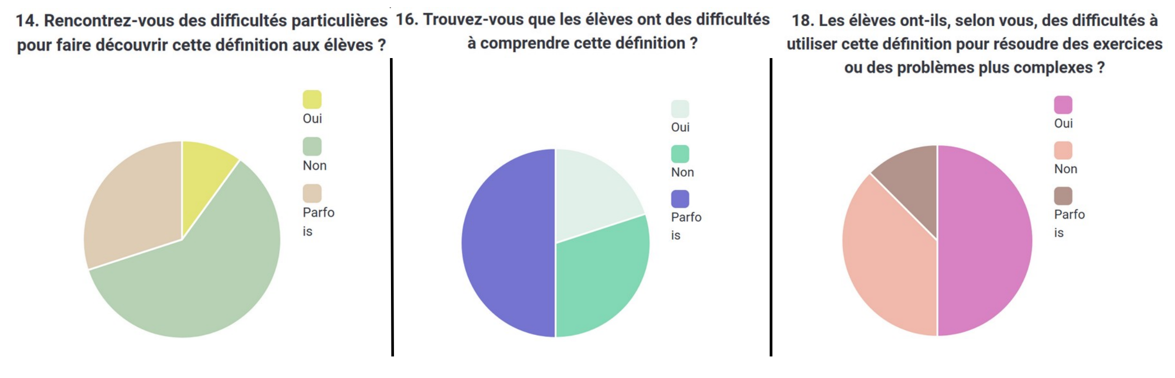


Figure 61: Difficultés rencontrées

Les enseignants indiquent que les obstacles que les élèves rencontrent pour comprendre la définition sont liés au sens de la division, qu'ils ont aussi des difficultés à comprendre qu'une fraction peut également être un nombre, et que l'expression littérale n'est pas maîtrisée. Aussi les élèves s'appuient sur les exemples numériques donnés dans le cours, mais pas sur la définition écrite. Au niveau des exercices, les élèves ont des difficultés à se détacher de la représentation schématique de type pizza, et lors des calculs, ils cherchent à écrire un nombre décimal à tout prix, comme l'écrit un des enseignants : « c'est difficile pour eux d'accepter que la réponse exacte ait cette forme désagréable de deux nombres l'un au-dessus de l'autre ». D'après notre analyse des programmes officiels et des manuels français, les différents sens de la fraction auquel nous faisons référence dans notre étude épistémique (partie 3), sont diversement travaillés avant la 6e. Certes, tous les sens sont abordés (mise à part le sens « quotient »), mais celui qui est le mieux maîtrisé par les élèves est celui qu'ils ont découvert en premier et qui reste sans doute le plus naturel pour eux : le sens « partie-tout ». Ceci expliquerait la difficulté de se « détacher de la représentation schématique de type pizza ». Par ailleurs en 6e, les techniques pour poser la division ont encore besoin d'être stabilisées pour de nombreux élèves, et souvent le dernier chapitre de calcul traité dans les manuels avant le chapitre sur les fractions est celui de la division (c’est le cas des manuels Transmath et Myriade). Étant donné que l’on définit ici la fraction comme étant un quotient, spontanément les élèves cherchent à poser une division. Une réponse sous forme de fraction leur apparaît comme un calcul qui n’est pas terminé ou comme un calcul à faire, puisque jusqu’alors la réponse attendue d’eux dans les problèmes à résoudre se présentait toujours sous la forme d’un seul nombre. Dans ces circonstances, le choix de transposition fait dans le manuel Mission Indigo ouvre d’autres perspectives puisque le chapitre précédant celui des fractions est la proportionnalité. L’utilisation des fractions peut être motivée favorablement par la proportionnalité, mais par contre les élèves n’auront pas utilisé les fractions pour résoudre des situations de proportionnalité dans ce choix de transposition. Concernant les difficultés liées à l’utilisation des lettres pour généraliser le savoir déjà évoquées plus haut, elles relèvent également d’un choix de transposition puisque les élèves n’ont pas été introduits formellement au calcul littéral. D’autres choix étaient possibles, comme ce qui a été fait au Danemark par exemple (voir notre étude des manuels étrangers) où le manuel de 6e s’ouvre sur un chapitre de calcul littéral.

Lorsque la définition choisie est $\frac{a}{b} = a \div b$ tel que $\frac{a}{b} \times b = a$

Majoritairement, les enseignants justifient le choix de cette définition en soulignant que c’est celle qui est au programme officiel de 6e, 17 répondants utilisent cette définition. Ils travaillent dans un premier temps sur des exemples numériques, puis utilisent les lettres ensuite pour généraliser le résultat, quelques-uns l’écrivent également avec des symboles :

12. Ecrivez-vous cette définition avec des lettres, des symboles ou à travers un exemple numérique ? (Plusieurs réponses sont possibles).

Réponse	Décompte	Pourcentage
Lettres (SQ001)	14	82.35%
Symboles (SQ002)	5	29.41%
Exemples numériques (SQ003)	14	82.35%

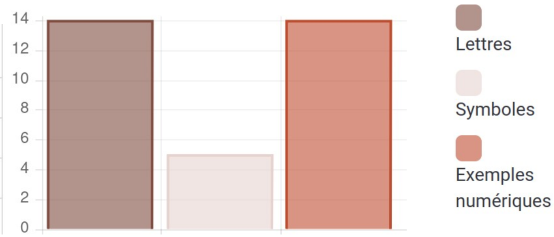


Figure 62: Choix pour l’écriture de la définition

Nous pouvons remarquer qu’aucun enseignant ne se contente d’exemples numériques ; la définition étant écrite avec des lettres ou des symboles, les exemples numériques ne viennent que compléter la définition :

12. Ecrivez-vous cette définition avec des lettres, des symboles ou à travers un exemple numérique ? (Plusieurs réponses sont possibles).

Réponse	Décompte	Pourcentage
Lettres (SQ001)	11	78.57%
Symboles (SQ002)	4	28.57%
Exemples numériques (SQ003)	14	100.00%

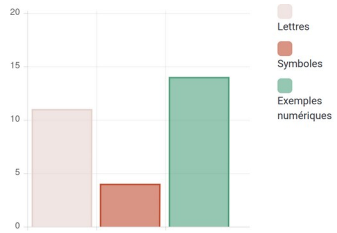


Figure 63: Utilisation d’exemples numériques pour illustrer la définition

Les difficultés évoquées par les enseignants revêtent alors de nouvelles caractéristiques, et il est dans un premier temps plus difficile aux enseignants de faire découvrir cette définition aux élèves. Selon eux, elle est très abstraite et compliquée pour les élèves à cause de la présence des lettres, ceci même en l’illustrant d’exemples numériques, tandis que la notion de partage n’est déjà pas toujours acquise par certains. De plus, pour pouvoir appréhender la fraction en tant que nombre, les élèves expriment le besoin d’en donner une valeur décimale approchée :

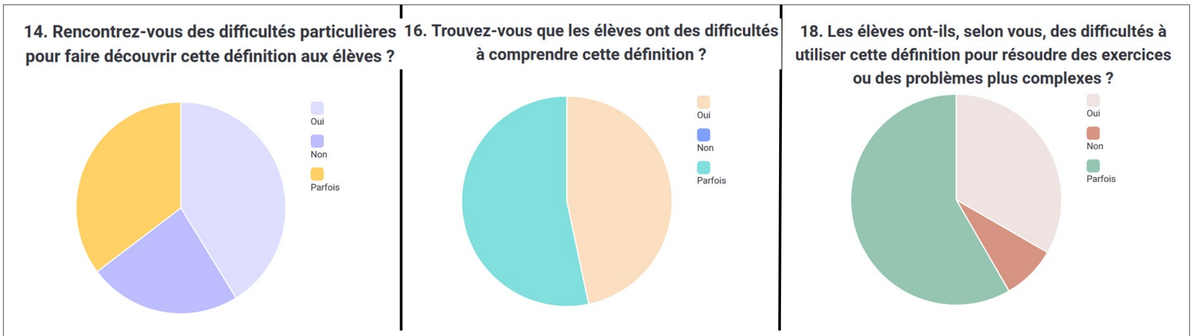


Figure 64: Difficultés rencontrées

Quelles que soient les difficultés rencontrées, il n’en reste pas moins que cette définition est celle retenue dans les programmes officiels d’après notre analyse des documents institutionnels. C’est également celle qui est présentée les manuels de 6e que nous avons analysés, mais également dans tous les manuels que nous avons pu consulter de manière plus large. Une fois la définition découverte, il ne se trouve aucun enseignant pour dire que les élèves n’ont pas de difficultés pour la comprendre, ce qui n’était pas le cas avec la première définition du sens « quotient », et un seul enseignant pense que les élèves n’ont pas de difficulté pour utiliser cette définition ensuite pour résoudre les exercices. Questionnés sur les raisons de ces difficultés, les enseignants évoquent en premier lieu celles déjà indiquées dans la découverte de la définition : c’est un objet de savoir très abstrait pour les élèves, et le passage d’un exemple générique à la généralisation avec des lettres est très difficile. Certains précisent que la difficulté est liée à la division qui est une opération qui « parfois ne se termine pas » et au mot quotient qui a un autre sens que dans la division euclidienne. Au niveau de la résolution des exercices, les difficultés semblent être en lien avec le sens de l’opération division qui est encore fragile, et que la division d’un petit nombre par un plus grand est complexe. Ils ajoutent que les élèves n’en voient pas l’utilité, qu’ils appliquent sans vraiment comprendre et que d’après certains enseignants, « Quelque temps après, il n’en reste rien ». La suite de la progression en 6e fera de nouveau appel à l’utilisation des fractions, que ce soit lors de l’étude de la proportionnalité ou des pourcentages, ce qui pourra être l’occasion de motiver différemment la définition du sens « quotient » de la fraction. Malgré cela, nous avons relevé dans notre expérience de l’enseignement que les élèves éviteront d’utiliser les fractions dans leurs stratégies personnelles de résolution, pour finalement se ramener à des écritures de calculs comme celles utilisées en CM2 avec lesquelles ils se sentent plus à l’aise et rassurés.

Recueil d’opinions

Lorsque la définition choisie est $\frac{a}{b} = a \div b$, 4 enseignants sur 10 indiquent avoir essayé l’autre définition, et expliquent qu’ils ont cessé de l’utiliser, car les élèves ne parvenaient pas à y mettre du sens, en particulier il est relevé que la formulation « le nombre qui multiplié par… donne… » était trop difficile à comprendre pour les élèves. Interrogés ensuite sur cette partie du programme de manière plus générale, chacun s’accorde à trouver le thème des fractions difficile pour les élèves, voire même le plus difficile. Certains disent très ouvertement qu’ils ne voient pas l’utilité dans la suite du parcours scolaire de la définition qu’ils ont rejetée. L’un souligne par ailleurs que : « la partie "prendre une fraction d’une quantité" où on leur fait calculer de 3 manières différentes $\frac{a}{b} \times c$ n’est pas adaptée pour des 6èmes. Ils appliquent les formules sans les comprendre (et ils les oublient aussi vite) ». Pourtant, lorsqu’on aborde la proportionnalité, une erreur récurrente des élèves consiste à donner l’inverse du coefficient de proportionnalité d’un tableau (ils ne savent pas quel nombre doit être divisé par quel nombre). Plutôt que d’appliquer alors une technique qu’ils auront mémorisée plus ou moins efficacement, pouvoir se raccrocher à la définition correcte du quotient permet de donner du sens au calcul et d’avoir les clefs pour dépasser ces erreurs.

Lorsque la définition choisie est $\frac{a}{b} = a \div b$ **tel que** $\frac{a}{b} \times b = a$

Interrogés sur leur opinion personnelle concernant cette définition, les enseignants considèrent que c’est la bonne définition à utiliser, qu’elle est importante pour la suite, et en même temps qu’elle est trop complexe, trop abstraite et difficile à comprendre pour un bon nombre des élèves de 6e, et même parfois toujours pas maîtrisée en fin de collège. À la question « auriez-vous préféré donner une autre définition aux élèves », beaucoup restent sans réponse :

22. Auriez-vous préféré proposer une autre définition aux élèves ?

Réponse	Décompte	Pourcentage
Oui (A1)	3	17.65%
Non (A2)	5	29.41%
Sans réponse	9	52.94%

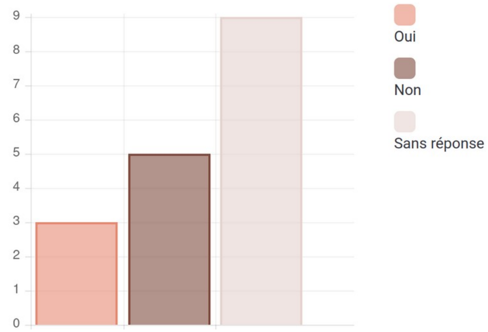


Figure 65: Préférence pour une autre définition

Parmi ceux qui ont répondu « Oui », un seul indique par la suite qu'il aurait préféré donner la première définition. Questionnés de manière plus générale sur leur opinion par rapport à cette partie du programme, la plupart des enseignants expriment qu'elle est difficile, ou très difficile à enseigner, mais ils la jugent aussi très importante et nécessaire. C'est un problème professionnel lié au choix de transposition didactique (choix de la définition dans le savoir à enseigner) comme nous avons pu le discerner à travers l'analyse des programmes et des manuels français tout en menant une comparaison avec ce qui se fait dans d'autres pays étrangers.

6.3 Conclusion

Grâce à l'anonymat que garantissait le questionnaire, nous avons pu observer l'honnêteté et la liberté avec laquelle les enseignants se sont exprimés. Nous avons été surprises d'apprendre que seulement 37 % d'entre eux disent suivre les prescriptions officielles, les autres reconnaissant qu'ils ne le font pas toujours ou peu. Nous avons de même été étonnées de constater qu'un tiers n'utilise pas la définition du sens « quotient » prescrite par le ministère, et font un autre choix de transposition de cet objet de savoir. Nous remarquons qu'il reste des difficultés autour des apprentissages, quand bien même la définition a été simplifiée. Nous avons trouvé très intéressante la remarque d'un enseignant expliquant que son équipe de mathématiques avait décidé de déplacer ce savoir à apprendre à la classe de 5e. Par ailleurs, les enseignants utilisant la définition correcte s'accordent à dire qu'elle est difficile d'accès et abstraite pour un élève de 6e, mais peu d'entre eux souhaitent en changer puisqu'elle est pour eux importante et nécessaire, tout autant que le reste du travail sur le thème des fractions. Pour répondre à notre question de recherche Q3, « Comment les enseignants s'emparent-ils du savoir à enseigner et du savoir apprêté pour construire leur projet de cours ? », nous pouvons dans un premier temps dire que les prescriptions officielles ne sont pas toujours adoptées par les enseignants, même par ceux qui affirment les suivre, tout au moins concernant cet objet de savoir. Les enseignants font une transposition interne en adaptant le savoir à enseigner au contexte concret de leur classe et de leurs convictions personnelles construites autour de leur expérience et de leur pratique de l'enseignement. Il en va de même concernant le savoir apprêté dans les manuels, les enseignants construisent leur projet de cours de façon très personnelle (présence ou non d'une activité de découverte, choix de la définition), en croisant les ressources à leur disposition et en faisant appel à des matériaux extérieurs pour affiner leurs choix de transposition interne dans leur liberté pédagogique. Le savoir apprêté dans les manuels prend alors la place d'une autre approche qui présente une alternative au savoir institutionnalisé en classe et que l'élève peut visiter en cas de difficultés. Par contre le manuel reste un outil de référence quant aux choix des exercices travaillés ensuite. Dans une étude plus approfondie, il aurait été judicieux d'examiner ces ressources extérieures auxquelles les enseignants font référence. De plus, après avoir documenté certains aspects du savoir enseigné dans les classes dans cette partie, nous aurions souhaité approfondir ensuite quant au savoir effectivement appris par l'élève dans la classe ; ceci pourrait éventuellement être développé dans nos recherches ultérieures.

7 CONCLUSION

Dans cette étude de transposition du sens « quotient » pris par la fraction, nous avons dans un premier temps exploré la documentation officielle, afin de cerner les choix de transposition faits par la noosphère, et de répondre à notre première question de recherche QR1 : Quels sont les choix de transposition faits par rapport à la fraction-division dans les programmes scolaires français en fin de cycle 3 ? En France, le sens « quotient » de la fraction est préconisé en fin de cycle 3, en 6e. Dans la documentation officielle, la fraction $\frac{a}{b}$ où a est un nombre entier et b est un nombre entier non nul est définie comme étant le nombre qui multiplié par b donne a ; il s'agit du quotient de a par b. Cette définition intervient dans la progression à un moment où le sens et la technique de la division ont encore besoin d'être stabilisées en 6e. De plus, pour les élèves de ce niveau, le statut de la lettre n'est pas bien établi, les indications de programme mentionnant que c'est en 5e que la production et l'utilisation de formules devient un objectif de formation, ce travail étant juste initié au cycle 3. En consultant les documents officiels de divers pays européens, nous avons montré que le choix y est fait d'aborder le sens « quotient » de la fraction plus tôt, mais ceci est préconisé de manière différente : il s'agit simplement d'associer la barre de fraction au symbole de la division. Le choix de transposition français apparaît alors comme une exception. Par ailleurs, un pays comme le Danemark par exemple, aborde le calcul littéral dès le début de la 6e dans son choix de transposition, ce qui permet ensuite seulement d'écrire des formules du type $\frac{a}{b} = a \div b$.

Dans la suite de notre étude de transposition externe, nous avons cherché à apporter des éléments de réponse à notre deuxième question de recherche, QR2 : Comment, à partir du savoir défini comme étant à enseigner ce savoir est-il apprêté dans les manuels scolaires ? Le savoir à enseigner apprêté dans les manuels français respecte les directives officielles. La définition retenue est : « Le quotient de deux nombres a et b (avec b non nul) est le nombre qui, multiplié par b donne a. Sous forme fractionnaire, le quotient de a par b s'écrit $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) ». Des variantes de cette définition existent, remplaçant la dernière phrase par : « On le note $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$ » ou en écrivant l'égalité « $\frac{a}{b} = a \div b$ ». L'avantage des deux dernières propositions est de faire apparaître le symbole de la division, car le mot « quotient » est un mot de vocabulaire qui résiste encore à certains élèves de 6e. Une variante de cette définition est écrite avec des symboles (triangle et carré) plutôt qu'avec des lettres, mais il n'est pas certain que cela puisse faciliter la compréhension des élèves. Les activités de découverte préalables à l'institutionnalisation du savoir sont très variables dans les processus mentaux mis en jeu. Dans l'un des manuels étudiés, l'activité permet de découvrir le sens « quotient » de la fraction, mais pas l'égalité $\frac{a}{b} \times b = a$. Une activité d'un autre manuel propose de relier fraction et quotient essentiellement en mettant en évidence que dans l'égalité $\frac{a}{b} \times ? = a$, le nombre cherché est b, sans aborder tous les aspects du problème. Dans notre étude praxéologique des exercices présentés dans les manuels dans le chapitre sur les fractions, nous avons pu observer que le sens « quotient » n'est pas toujours l'interprétation la plus travaillée dans les exercices, ceci étant dépendant du reste du contenu du chapitre. Dans les exercices travaillant le sens « quotient », le type de tâche qui prédomine est : « Donner la valeur exacte d'un quotient ». Dans les manuels étrangers, le sens quotient est défini en associant la barre de fraction au symbole de la division, comme prescrit par la documentation officielle de ces pays. Nous avons pu remarquer que les définitions données ne font pas intervenir de formules pour la grande majorité, la définition étant abordée sous forme d'exemples numériques. Lors de l'exploration des manuels étrangers, nous avons pu constater que la place accordée aux nombres décimaux est très éloignée de celle que nous connaissons en France et qu'ils semblent assimiler nombres décimaux et représentation décimale d'un nombre. Dans ces conditions, la définition française du sens « quotient » de la fraction ne semble pas la plus pertinente. De par notre choix méthodologique (p.8), notre analyse synchronique nous a permis de mettre en évidence la relativité institutionnelle des savoirs. Elle nous a permis de questionner le savoir présent dans notre système didactique et de nous départir d'une « illusion de transparence » (Wozniak, F. et al., 2012), ce qui viendra nourrir de nouvelles perspectives pour nos travaux futurs.

Dans une dernière partie, nous avons voulu interroger la transposition interne effectuée par les enseignants en lien avec notre troisième question de recherche, Q3 : « Comment ensuite les enseignants s'emparent-ils du savoir à enseigner et du savoir apprêté pour construire leur projet de cours ? » et nous avons pu documenter une certaine diversité des pratiques à travers les réponses données par les enseignants à notre questionnaire. Nous avons relevé que les enseignants qui utilisent un manuel scolaire ne s'appuient pas toujours sur les activités de découverte qui y sont proposées (de même pour les éléments de cours formulés) et construisent un projet de cours faisant appel à diverses ressources, les plus citées étant les fiches IREM et Sésamath. Une partie des enseignants indique ne pas suivre les préconisations officielles, mais parmi ceux qui disent les suivre, on peut remarquer qu'un certain nombre ne les appliquent pas. Ainsi un tiers des enseignants n'utilise pas la définition du sens « quotient » de la fraction telle que déterminée dans les documents officiels, mais ils utilisent la définition que l'on retrouve dans d'autres pays européens, à savoir : $\frac{a}{b} = a \div b$ sans utiliser la partie $\frac{a}{b} \times b = a$. Ce choix de transposition interne est motivé selon eux par les difficultés des élèves à comprendre et à s'approprier la définition officielle. Parmi les enseignants utilisant la définition attendue, certains expriment qu'ils auraient préféré utiliser simplement $\frac{a}{b} = a \div b$ pour les mêmes raisons, alors que d'autres sont satisfaits malgré les difficultés constatées en classe. Finalement nous pouvons avancer que la définition officielle ne remporte pas l'adhésion complète des enseignants, ce qui induit que le savoir défini comme étant à enseigner n'est pas toujours celui enseigné de manière effective dans les classes.

Dans des perspectives de recherches ultérieures pour compléter notre étude de transposition, il serait sans doute judicieux d'examiner plus attentivement les autres ressources utilisées par les enseignants (fiches IREM et Sésamath). Nous souhaitons nous questionner sur la place de l'élève et chercher à déterminer quel est le savoir appris par l'élève lorsqu'on aborde cet objet de savoir particulier en classe. Nous envisageons donc de tester une nouvelle trace de cours en 6e en faisant une introduction courte au calcul littéral pour que le statut de la lettre soit plus clair avant d'aborder le chapitre sur les fractions. Cette nouvelle trace écrite serait construite à partir de l'analyse des manuels français et étrangers. De plus, en début d'année, au moment de l'étude des nombres entiers, il serait possible d'insister davantage sur la multiplicité des représentations pour un même nombre (numération égyptienne — numération en base 2 — numération hexadécimale), ce qui participerait à faciliter la perception de la fraction comme un nombre à part entière par les élèves. Par ailleurs, nous souhaiterions compléter notre étude de transposition en approfondissant la partie 4 de notre travail au sujet du savoir apprêté dans les manuels français, et en particulier en approfondissant l'analyse praxéologique ébauchée dans ce TER. D'autres points ont retenu notre attention au cours de notre étude, par exemple la manière dont peut être exprimée la définition d'un nombre décimal dans d'autres pays européens que la France. Nous portons en outre des interrogations quant à l'évolution du savoir à enseigner autour du sens « quotient » pris par la fraction et il nous semble qu'une analyse diachronique pourrait se révéler une expérience riche d'enseignements.

8 BIBLIOGRAPHIE

Alahmadati A. (2016, 29 janvier). *Autour du concept de fraction à l'école primaire en France : Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III*. [Thèse de doctorat, Université de Lyon 2]. https://shs.hal.science/tel-01302152/document

Allard, C. (2015, 3 décembre). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* [Thèse de doctorat, Université de Paris Diderot]. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807/document

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, Dans Bailleul et al. (eds.), *Actes de la IXe Ecole d'Ete de Didactique de Mathématiques*, p.101-139, Houlgate, 1997

Behr, M., et al. (1983). Rational number concepts. Dans R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (91-125). Academic Press Inc. https://www.researchgate.net/profile/Edward-Silver-2/publication/258510439_Rational_number_concepts/links/57598dc808aed884620b0d82/Rational-number-concepts.pdf

Bessot, A., et Comiti, C. (2008). Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques: Le cas Viêt-Nam/France, Dans L. Coulange et C. Hache (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2008*, (p. 171-193). Université Paris 7, France http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR09001.pdf

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

Børne og Undervisningsministeriet (2019). Matematik Undervisningsvejledning. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_Vejledning_Matematik.pdf

Brousseau, G. et Brousseau, N. (2008). Atelier d'ingénierie et d'analyse des processus didactiques. Rationnels et décimaux dans l'enseignement obligatoire. Dans A. Rouchier et I. Bloch (Eds.) *Perspectives en didactique des mathématiques ; Cours de la XIII ème École d'été de didactique de mathématiques 2005*. La pensée sauvage. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/11/atelier-2005.pdf

Bueno-Ravel, L. (2005). Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique, Dans C. Castela et C. Houdement (eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2004*, (p.193-222). Université Paris 7, France http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR05003.pdf

Chaachoua, H. et Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique, Dans Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. (Eds). Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action, (p.771-790). IUFM de l'académie de Montpellier (novembre 2007)

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 12/1, 83-121.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, 108, 211-236.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique — du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coulange, L., et Train, G. (2017, juin). Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 Quelles perspectives ? Actes du colloque Mathématiques en cycle 3, Poitiers, France.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02514487/document
fichiers associés : http://irem.univ-poitiers.fr/colloque2017/Ateliers.html

Decreto legislativo 19 febbraio 2004, n. 59 relatif à la « Definizione delle norme generali relative alla scuola dell'infanzia e al primo ciclo dell'istruzione », (2004/2016).

https://www.miur.gov.it/documents/20182/51197/Decreto+legislativo+59+del+2004%2C+Definizione+delle+norme+generali+relative+alla+scuola+dell%27infanzia+e+al+primo+ciclo+dell%27istruzione.pdf/3584ba2f-d0f5-4cd4-9235-2a17e80166e8?version=1.0&t=1479811865414

Department for Education — UK Government. (consulté en avril 2023). *National curriculum in England : Mathematics programmes of study*. https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study#year-1-programme-of-study

European Education and Culture Executive Agency, Eurydice, Baïdak, N., Sicurella, A., Riiheläinen, J. (2020). *The structure of the European education systems 2020/21 : schematic diagrams*, Publications Office of the European Union. https://data.europa.eu/doi/10.2797/39049

European Commission, European Education and Culture Executive Agency, Motiejūnaitė-Schulmeister, A., Sicurella, A., Birch, P. (2022). *The structure of the European education systems 2022/2023 : schematic diagrams*, (P. Birch, editor) Publications Office of the European Union. https://data.europa.eu/doi/10.2797/21002

Kieren, T. E. (1980, mai), Recent Research on Number Learning, *Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education*, Université d'Ohio, (1980), 133-137. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED212463.pdf

Margolinas, C. (2020). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. *Grand N, Revue de mathématiques, de sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire*, 106, 5-30. hal-02981512 https://hal.science/hal-02981512/file/article_grand_n-%20MARGOLINAS%20version%20HAL%202021.pdf

Martinez, S., et Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire : Quelques enseignements tirés de TIMSS 2015. *Éducation & formations*, 2017(94), 23-40. https://archives-statistiques-depp.education.gouv.fr/Default/digital-viewer/c-44922

Mercier, P. (2004). *Le passage de l'école primaire à l'école secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions.* [Mémoire de Maîtrise ès arts (M.A.), Université de Laval, Canada]. https://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk4/etd/MQ92140. PDF

Ministère de l'Éducation Nationale (2016, novembre). Document d'accompagnement et annexes. *Fractions et nombres décimaux au cycle 3.*

https://eduscol.education.fr/document/16510/download

Ministère de l'Éducation Nationale (2020 a). Programme du cycle 3. *B.O. n°31 du 30 juillet 2020.* https://cache.media.eduscol.education.fr/file/A-Scolarite_obligatoire/37/5/Programme2020_cycle_3_comparatif_1313375.pdf

Ministère de l'Éducation Nationale (2020 b). Repères annuels de progression cycle 3 Mathématiques. https://eduscol.education.fr/document/14026/download

Ministerio de Educación y Formación Profesional — Gobierno de España. (consulté en avril 2023). *Matemáticas : competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos.* Educagob portal del systema educativo español. https://educagob.educacionyfp.gob.es/eu/curriculo/curriculo-lomloe/menu-curriculos-basicos/ed-primaria/areas/matematicas/criterios-evaluacion-tercer-ciclo.html https://educagob.educacionyfp.gob.es/eu/curriculo/curriculo-lomloe/menu-curriculos-basicos/ed-primaria/areas/matematicas/criterios-evaluacion-segundo-ciclo.html

Ministero dell'Istruzione e del Merito. — Governo Italiano. (consulté en avril 2023). *Scuola primaria*. https://www.miur.gov.it/scuola-primaria

Ministero dell'Istruzione e del Merito. — Governo Italiano. (consulté en avril 2023). *Scuola secondaria di primo grado*. https://www.miur.gov.it/web/guest/scuola-secondaria-di-primo-grado

Pedersen, P. L. (2021). *Learning and understanding the complexity of fractions.* Aalborg Universitetsforlag. [Thèse de doctorat, Det Humanistiske Fakultet, Université d'Aalborg]. https://vbn.aau.dk/en/publications/learning-and-understanding-the-complexity-of-fractions

Staatsinstitut für schulqualität und bildungsforschung. München. (consulté en avril 2023). *LehrplanPLUS Mathematik Grundschule Jahrgangsstufe 4*. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/grundschule/4/mathematik

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. München. (consulté en avril 2023). *Lehrplan Jahrgangsstufe 5 Mathematik. Lehrplan Jahrgangsstufe 6 Mathematik* https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26325.html https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26307.html

Wozniak, F., et al. (2012). *Yves Chevallard*. ARDM (consulté en Mai 2023) https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/yves-chevallard/

Manuels scolaires dans l'ordre d'apparition dans le texte

Hélayel, J., et al. (2020). *Au rythme des maths CM2*. Bordas. ISBN 9782047337554

Petit-Jean, I., et al. (2020). *Outils pour les maths*. Magnard. ISBN 9782210506381

Charnay, R., et al. (2021). *Cap Maths CM2*. Hatier. ISBN 9782401079465

Brissiaud, R., et al. (2017). *J'apprends les maths CM2*. Editions Retz. ISBN 9782725675947

Boullis, M., et al. (2021). *Myriade 6e*. Bordas éditeur. ISBN 9782047338773

Barnet, C., et al. (2021). *Mission Indigo 6e*. Hachette Education. ISBN 9782017025511

Malaval, J., et al. (2022). *Transmath 6e*. Nathan. ISBN 9782091718835

Gregersen, P., et al. (2008/2013). *Matematrix 6, Grundbog.* Alinea. ISBN 9788723530301

Gregersen, P., et al. (2008/2013). *Matematrix 5, Grundbog.* Alinea. ISBN 9788723024404

Gregersen, P., et al. (2006/2012). *Matematrix 4, Grundbog.* Alinea. ISBN 9788723020086

Almodóvar Herráis, J. A., et al. (2019). *LM PLAT Alumno Matemáticas 5 Primaria Saber Hacer Contigo. Grazalema.* Santillana Education. ISBN 9788491323471

Almodóvar Herráis, J. A., et al. (2019). *LM PLAT Alumno Matemáticas 6 Primaria Saber Hacer Contigo. Grazalema.* Santillana Education. ISBN 9788491323532

Almodóvar Herráis, J. A., et al. (2021). LM PLAT Alumno Matemáticas 2 ESO Región de Murcia Saber Hacer Contigo. Santillana Education. ISBN 9788468073576

Bussini, S., et al. (2019). *Officina delle discipline Matematica 4.* Raffaello. ISBN 9788847232907

Bussini, S., et al. (2019). *Officina delle discipline Matematica 5.* Raffaello. ISBN 9788847232891

Ferri, L., et al. (2016). *Da zero a infinito 1*. Fabbri Editori. E-ISBN 978889151899

Tordella, A., et al. (2022). *Senza Frontiere 5 Matematica*. Mondadori Education. ISBN 9788824779579

Costa, E., et al. (2020). *Traguardo discipline 5 Matematica*. La spiga Edizioni. ISBN 9788846840950

Deinlein, U., et al. (2017). *Formel plus 5 Mathematik. Bayern Lehrbuch*. Buchner, C.C. Verlag. ISBN 9783661600055

Brucker, J., et al. (2018). *Formel plus 6 Mathematik. Bayern Lehrbuch*. Buchner, C.C. Verlag. ISBN 9783661600062

CGP Books, (2020). *KS2 Maths Targeted Study Book — Year 5.* CGP. Code produit : M5R24DF, ISBN : 9781847621849

CGP Books, (2020). *KS2 Maths Targeted Study Book* — Year 6. CGP. Code produit : M6R24DF, ISBN : 9781847621849

CGP Books, (2021). *KS3 Maths Year 7 Student Book*. CGP. Product code : M7TB31, ISBN : 9781789087864

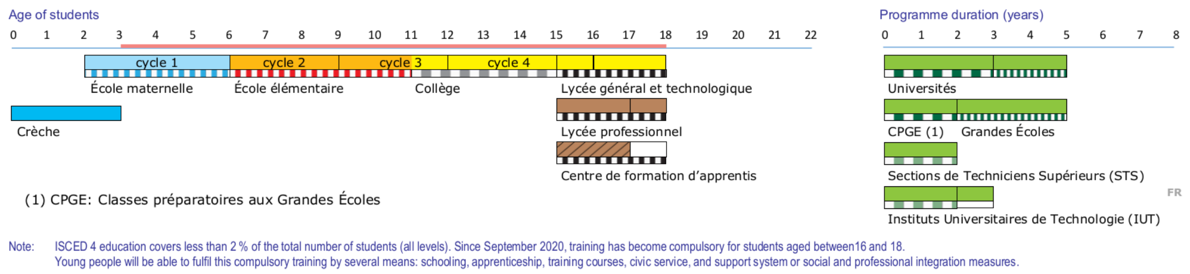
Index des figures

Index des tableaux

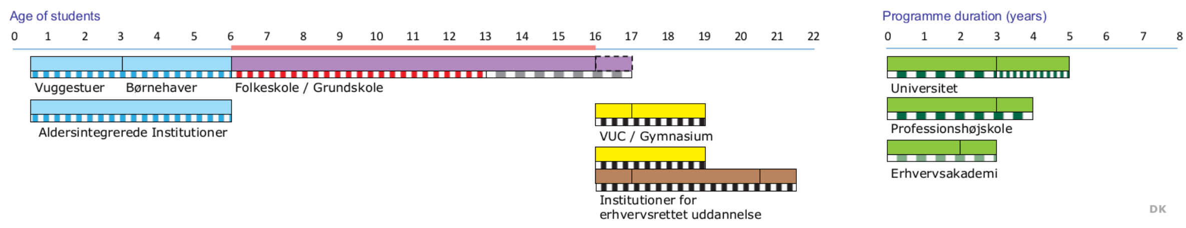
9 ANNEXE 1 : STRUCTURE DES SYSTÈMES D’ÉDUCATION EUROPÉENS

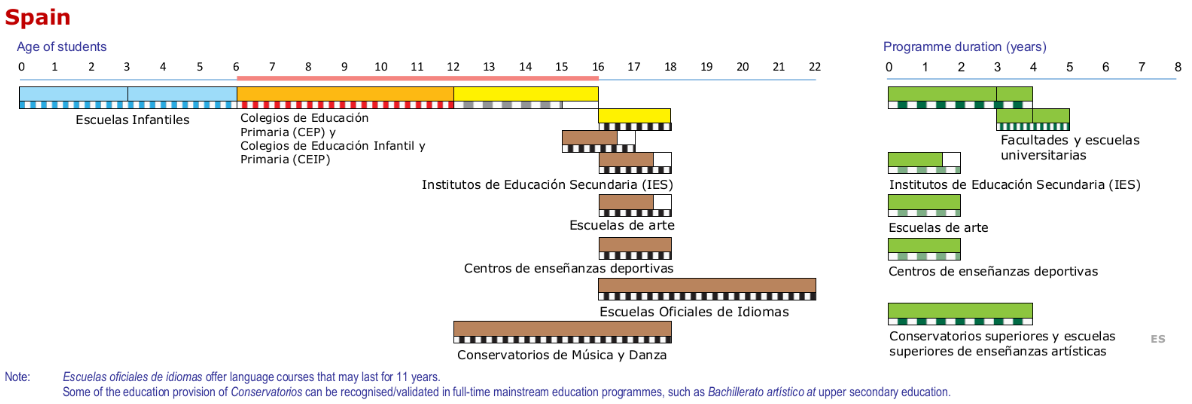
Cette annexe présente les différents systèmes d’éducation européens, les diagrammes produits permettent de repérer le cycle et la classe d’un élève en fonction de son âge. Les documents ci-dessous proviennent de l’European Commission, European Education and Culture Executive Agency (2022) :

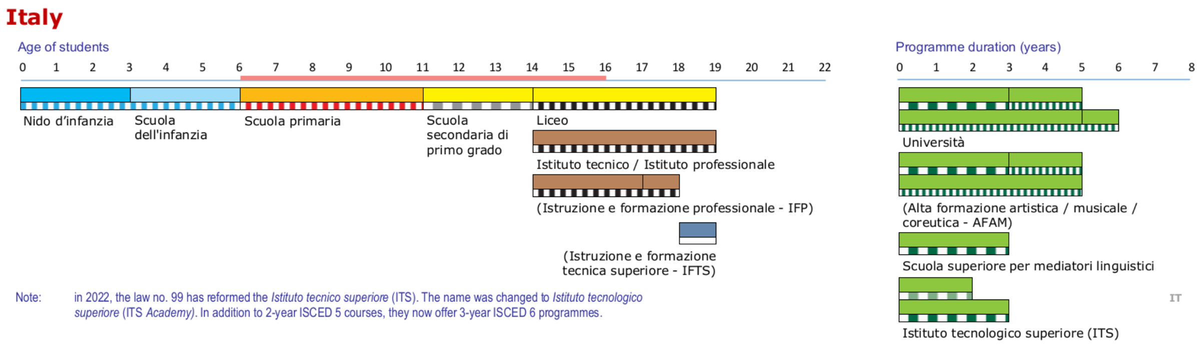
France

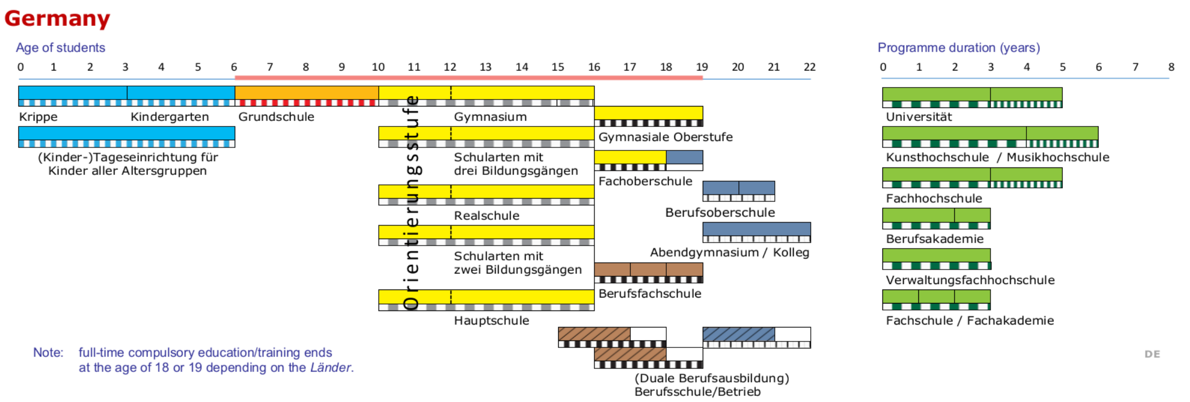


Denmark

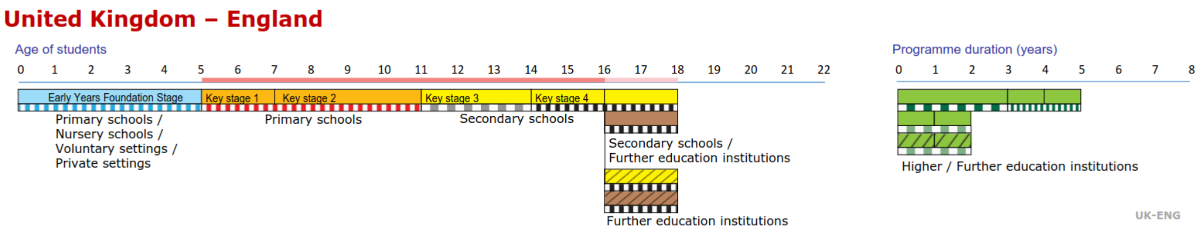








Concernant l'Angleterre, d'après le European Education and Culture Executive Agency (Eurydice, 2020) :



Légende

Niveaux et types d'enseignement	
	Accueil et éducation des jeunes enfants (sous la responsabilité d'un autre ministère que celui de l'éducation)
	Accueil et éducation des jeunes enfants (sous la responsabilité du ministère de l'éducation)
	Enseignement primaire
	Structure unique
	Enseignement secondaire général
	Enseignement secondaire professionnel
	Enseignement post-secondaire non supérieur
	Enseignement supérieur (temps plein)
Allocation aux niveaux CITE 2011 (voir définitions ci-dessous)	
	CITE 0 — CITE 2 — CITE 4 — CITE 6
	CITE 1 — CITE 3 — CITE 5 — CITE 7
Autres éléments	
	Enseignement/formation obligatoire à temps plein
	Enseignement/formation complémentaire obligatoire à temps partiel
	Formation en alternance (en établissement d'enseignement et en entreprise)
	Année complémentaire p — >> Études à l'étranger
→| année	Programme en cours de suppression (année)
-/n/-	Expérience professionnelle obligatoire + sa durée (en années)

Résumé

La présente étude se propose d’analyser les choix de transposition didactique (Chevallard, 1985) adoptés par rapport à la fraction-division en France. Les choix de transposition faits dans les programmes scolaires en cycle 3 sont dans un premier temps examinés. Ensuite est explorée la manière dont est apprêté cet objet de savoir dans des manuels scolaires. Une analyse synchronique est également menée dans quelques autres pays européens et nous permet de mettre en lumière certains aspects des choix de transposition français et de nous départir d’une « illusion de transparence » au sens de Chevallard. Enfin, par le biais d’une analyse des réponses des enseignants données à un questionnaire, nous inspectons comment les enseignants s’emparent du savoir à enseigner et du savoir apprêté pour construire leur projet de cours.

Mots clefs : Transposition didactique, Analyse synchronique, sens « quotient » de la fraction